Universität Ulm | 89069 Ulm | Germany

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Studienkommission
Mathematische Studiengänge
Helmholtzstraße 18
89081 Ulm

Die transzendente Zahl Pi

vor dem Hintergrund der Mathematikgeschichte

```
         3.14159265358979323846264338327 9
       5028841971693993751058209749445923
      078164062862089986280348253421170 67
      9821    48086         5132
     823      06647        09384
    46        09550        58223
    17        25359        4081
              2848         1117
              4502         8410
              2701         9385
             21105        55964
             46229        48954
             9303         81964
             4288         10975
            66593         34461
           284756         48233
           78678          31652        71
          2019091         456485       66
         9234603           48610454326648
        2133936            0726024914127
        3724587             00660631558
        817488               152092096
```

Wissenschaftliche Arbeit im Rahmen des Studiums höheres Lehramt

Vorgelegt von:
Janosch Walter Zoller
janosch.zoller@uni-ulm.de

Gutachter und Betreuer:
Dr. Gerhard Baur

2016

Fassung 20. September 2016

Satz: PDF-LaTeX 2_ε

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Vorwort

Von kaum einer anderen Konstante geht eine derart große Faszination aus wie von der sogenannten Kreiszahl π. Bekannt schon spätestens seit dem Ausgang der Steinzeit, schlägt dieses schwer zu fassende Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises Menschen in seinen Bann. Von den Ägyptern, die im Schatten der Pyramiden mit Hilfe von π ihre Felder vermaßen, zu den Griechen, die der Kreiszahl mit analytischer Geometrie zu Leibe rückten, über die ungewaschenen Barbaren des Mittelalters und die großen Genies der Renaissance bis zur Dämmerung der modernen Mathematik - nahezu die gesamte Mathematikgeschichte wird von Entwicklungen zur Kreiszahl π begleitet. Kaum ein mathematisches Thema, dessen praktische Relevanz schon seit Jahrhunderten ausgeschöpft ist, hat sich so lange gehalten und vor allen Dingen auch so viel Zuspruch in der Populärwissenschaft erfahren. Trotz inzwischen mehreren Billionen bekannter Dezimalstellen von π sind noch immer Menschen damit beschäftigt immer weitere Stellen zu berechnen. Es gibt Fanclubs für die Zahl π, deren Aufnahmeritual das auswendige Aufsagen einer bestimmten Anzahl Nachkommastellen von π ist. Am 14. März (in amerikanischer Schreibweise 3/14) wird von π-Enthusiasten der Pi-Day zu Ehren der Kreiszahl gefeiert.

Die hier vorliegende Arbeit wird sich damit befassen, die historische Entwicklung aufzuzeigen, die die Kreiszahl π im Bewusstsein der Menschheit und der Mathematik durchlaufen hat. Wir werden dabei vor allem auf die vielfältigen Näherungen und Abschätzungen eingehen, derer sich bedient wurde, um diese schwer fassbare Konstante einzugrenzen. In diesem Prozess werden wir einen sehr großen Teil der Mathematikgeschichte direkt oder indirekt streifen und die Auswirkungen der Zeitgeschichte und ihrer Hintergründe auf die Mathematik beobachten können.

Wie schon im Vorgängerdokument ist auch im gymnasialen Bildungsplan 2016 für das Fach Mathematik des Landes Baden-Württemberg vorgesehen, dass mathematische Inhalte nicht nur mit Konzentration auf die reine Mathematik an sich vermittelt werden:

> „*Mathematische Bildung trägt zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem sie ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen nach Winter ermöglicht, die miteinander in engem Zusammenhang stehen: technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mithilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen; [...]*“
>
> Bildungsplan des Gymnasiums 2016, Mathematik, Baden-Württemberg (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport)

Nach wie vor sind also im gymnasialen Schulunterricht kulturelle Entwicklungen unter mathematischen Gesichtspunkten zu bewerten. Insbesondere vor diesem Aspekt bekommt eine mathematikgeschichtliche Betrachtung wie die hier vorliegende eine besondere Bedeutung für das Lehramt; gerade die sehr unterschiedlich geprägte Geschichte der Kreiszahl π fördert viele interessante Aspekte zu Tage.

Wenn wir schließlich im geschichtlichen Überblick die Neuzeit erreicht haben wollen wir uns der Frage zuwenden, inwiefern es zwischen der historischen Behandlung des Themas und der Auffassung in der modernen Mathematik Bedeutungsunterschiede bezüglich π gibt und worin diese begründet liegen. Insbesondere auf die zahlentheoretischen Besonderheiten von π in der modernen Mathematik werden wir gesondert und mit entsprechender Sorgfalt eingehen.

Der geneigte Leser sei darauf hingewiesen, dass es im Rahmen einer solchen wie der hier vorliegenden Arbeit völlig unmöglich ist, die Geschichte von π einerseits in umfassendem Gesamtbild, andererseits aber auch vollständig detailgetreu wiederzugeben. Da wir es für sinnvoll halten, einen perspektivenreichen Gesamtüberblick über ein solches wie das vorliegende Thema zu geben, haben wir uns demnach entschlossen, nicht jeden Gedankengang, den wir hier erwähnen werden, detailreich auszuführen; stattdessen führen wir nur eine interessante Auswahl der Überlegungen tatsächlich im Detail aus, während wir für andere Überlegungen in Detailfragen auf die einschlägige Literatur verweisen, die in jenen Fragen einen größeren Umfang bieten kann als uns das hier möglich ist.

2 Die geschichtliche Entwicklung von Pi

Wollen wir die geschichtliche Entwicklung nachvollziehen, die zur Entdeckung der Kreiszahl π führte, so stehen wir schnell vor einem Problem, das sich in anderen mathematischen Gebieten in dieser Form nicht zeigt; heutzutage können wir, um die Entwicklung mathematischer Erkenntnisse nachzuvollziehen, meist auf Dokumente zurückgreifen, deren Entstehung zumindest durch Zeitgenossen dokumentiert und datiert ist. Wir können beispielsweise die mathematischen Errungenschaften eines Carl Friedrich Gauss oder eines Leonhard Euler anhand ihrer eigenen Schriften herausarbeiten und anhand des Datums der ersten Veröffentlichung chronologisch ordnen. Der Ursprung der Entwicklungen um π hingegen ist sehr viel schwieriger zu fassen, da uns keine Informationen darüber vorliegen, wann entsprechende Erkenntnisse zuerst gefunden wurden.

Suchen wir nach der ersten Erwähnung der Zahl π (die selbstverständlich zu dieser Zeit nicht als bestimmte, mit einem griechischen Buchstaben benannte Zahl, sondern als Verhältnis zwischen Kreisdurchmesser und -Umfang bekannt war), so fällt eben jene erste bekannte Erwähnung recht genau mit den ersten verschriftlichten Dokumenten der Menschheitsgeschichte zusammen.

Wir könnten den Beginn der Entwicklungen um π und die vorschriftliche Mathematik nun als Blackbox ansehen, also den Beginn der Entwicklungen als unbekannt hinnehmen und uns ausschließlich auf belegbare Daten konzentrieren. Tatsächlich zeigt uns die Geschichte aber (vgl. [Sonar, 1999], Kapitel 9.3, "der Prioritätsstreit"), dass es durchaus von mathematischem Interesse ist, nachzuvollziehen, in welcher Reihenfolge mathematische Erkenntnisse getroffen wurden. Im Zuge des Prioritätsstreits warf der Brite Sir Isaac Newton dem deutschen Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz vor, das von ihm entdeckte (und lange Zeit unveröffentlichte) Fluktuationsprinzip gestohlen und in Form seiner Differentialrechnung unter eigenem Namen veröffentlicht zu haben. Die Wellen um diese bedeutende Plagiatsaffäre schlugen im 18. Jahrhundert so hoch, dass Leibniz' Reputation und Glaubwürdigkeit erst nach seinem Tod wiederhergestellt werden konnte. Tatsächlich ist es von Bedeutung, einschätzen zu können, welche Entwicklungen aufeinander aufbauen und sich demnach gegenseitig bedingen und welche Entwicklungen unabhängig von Vorbedingungen in einem Geniestreich von einem brillianten Kopf gefunden wurden.

Da wir also auch den Beginn der Entwicklungen um π nachvollziehen wollen, müssen wir auch versuchen das Wissen zu erfassen, das bereits älter ist als die Nutzung von Schrift zur Konservierung von Wissen. Wie Petr Beckmann (vgl. [Beckmann, 1971] Kapitel 1, "Dawn") herausarbeitete, müssen wir, um den Ursprung des Wissens um π zu ergründen, also die Ebene der überprüfbaren Fakten verlassen und im Rahmen bestätigter Funde aus der Steinzeit darüber spekulieren, wann und unter welchen Bedingungen die Menschheit die Existenz und die Relevanz einer solchen Kreiszahl erkannte.

2.1 Vorschriftliche Mathematik: Ursprünge in der Steinzeit

Während wir wie erwähnt kaum belastbare Daten zur ersten Erwähnung von π haben, können wir uns der Sache von einem anderen Standpunkt nähern, um einen Rahmen zu ziehen. Wie Beckmann ausführt können wir davon ausgehen, dass für ein Verständnis von π mehrere grundlegende mathematische Elementarüberlegungen von Nöten sind. Wenn wir diese Vorbedingungen identifizieren können, können wir auch die Überlegungen um π zeitlich genauer eingrenzen.

Der Beginn dessen, was wir als steinzeitliche Mathematik bezeichnen können, ist sicherlich mit dem Erlernen des *Zählens* als solchem verknüpft. Dantzig (vgl. [Dantzig et al., 2005], Kapitel 1: Fingerprints, S. 5ff) weißt auf verschiedene Indizien hin, die belegen, dass zwischen erstem, rudimentärem Zählen („eins“, „zwei“ und „mehr als zwei“) und tatsächlicher Quantifizierung (Unterscheidung von „mehr als zwei“ in konkreten Zahlen „drei“, „vier“...) eine lange Zeit verstrichen ist; auch Alten (vgl. [Alten, 2005] Kapitel 1.1) verweist auf diesen Umstand. Dies markiert den Zeitpunkt, den wir vielleicht als den Anfang mathematischen Denkens definieren können. Argumentativ zieht er dabei sowohl linguistische Argumente[1] aus vielen nicht miteinander verwandten Sprachen heran, andererseits aber auch den Vergleich zu verschiedenen indigenen Kulturen, die sich auch heute noch auf einem verhältnismäßig primitiven Entwicklungsstand befinden. Die Menschheit hatte eine Möglichkeit gefunden, Mengen mit dem abstrakten Konzept einer Zahl zu beschreiben. Kurz darauf (in frühgeschtlichen Maßstäben) muss die Menschheit in der Lage gewesen sein, daraus weitere Elementarerkenntnisse abzuleiten; so das Konzept des *Messens* und dadurch eine Quantifizierung von Größe und Länge.

Archäologische Funde von Knochen mit äquidistanten Markierungen, die unter höchster Wahrscheinlichkeit als steinzeitlicher „Meterstab“ zu Längenmessungen benutzt wurden untermauern dies und liefern uns gleichzeitig einen ersten chronologischen Anhaltspunkt: Die von Vogelsang et. al. (vgl. [Vogelsang et al., 2010] Fig. 7) beschriebenen eingekerbten Knochenfundstücke aus dem Afrika der Zeit um 80.000 v.Chr. lassen sich noch nicht eindeutig, aber potenziell, einer mathematischen Nutzung zuschreiben. Auch der sogenannte *Lebombo-Knochen*, 1973 von Peter Beaumont gefunden und beschrieben, lässt sich noch rituellen Zwecken, eventuell sogar einer Kalenderfunktion als Mondkalender, zuschreiben, in späteren Schriften[2] ist aber auch von weiteren, zwischenzeitlich gefunden Knochen mit weniger Kerben die Rede. Diese Fundstücke sind etwa 44.000 Jahre alt. Der von Luke Mastin (vgl. [Mastin, 2010], „Prehistoric Mathematics“) und

1. Beispielsweise bedeutet das Englische *thrice* bzw. das Lateinische *ter* sowohl *dreifach* als auch *viele*, was im Zusammenhang mit anderen genannten Sprachbeispielen darauf hindeutet, dass ausreichend lange nicht zwischen „mehr als zwei“ unterschieden wurde, dass sich diese Bedeutung nachhaltig in den Vorläufern zivilisatorischer Sprachen verankern konnte.

2. vgl. [Beaumont and Bednarik, 2013]

Abbildung 2.1: Der Ishango-Knochen in Ausstellung in Belgien (links) und Schema der Einkerbungen darauf in den drei auf dem Knochen erkennbar voneinander abgegrenzten Spalten (rechts).

Alten (vgl. [Alten, 2005], Kap. 1.1) angeführte *Ishango-Knochen*, gefunden 1950 im Kongo, ist deutlich jünger (etwa 20.000 v.Chr.), diente aber nahezu unbestritten einem mathematischen Zweck. Exemplarisch ist dieser Knochen mit seinen Einkerbungen in Abbildung 2.1 dargestellt. Es ist in diesem Zusammenhang nicht klar, ob es sich um ein reines Zählinstrument gehandelt hat, oder ob ein höherer Zweck, etwa als Mondkalender, oder sogar als Rechenwerkzeug[3], hinter den Einkerbungen steht. Unzweifelhaft kann aber davon ausgegangen werden, dass spätestens im Jahr 20.000 v.Chr. einige Elementarkenntnisse vorhanden waren. Die gefundenen, eingekerbten Knochen finden sich überwiegend in Afrika, aber auch aus Europa gibt es bestätigte Funde - so der von Alten erwähnte und von Beckmann abgebildete Wolfsknochen von Vestonice, gefunden in Mähren 1937, der 55 Kerben in deutlichen Fünfergruppen aufweist, was ein deutliches Indiz für ein Zählwerkzeug darstellt. Dieser Knochen ist auf die Zeit um 30.000 vor Christus geschätzt worden.

Der nächste Schritt stellt nach Beckmann das Entwickeln einer Vorstellung von Relationen dar. An Alltagserfahrungen anknüpfend fand die Menschheit gleichbleibende Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen, wie der Größe und des Gewichts eines Steins. Durch die Vielfältigkeit solcher Erfahrungen im steinzeitlichen Alltag dürfte sich irgendwann auch das Konzept von (konstanten) Verhältnissen durchgesetzt haben, also die Erkenntniss, dass manche Größen bei konkreten Alltagsobjekten immer im selben Verhältnis zueinander liegen und sich verändern.

3. Diese Theorie wird unter anderem von Vladimir Pletser gestützt, der in seiner Arbeit von 1999 (vgl. [Pletser and Huylebrouck, 1999]) die Kerben als Additionstafel auf unterschiedlichen Zahlensystembasen interpretiert.

Die viel später in bronzezeitlichen[4] Hochkulturen im Mittelmeerraum und in Vorderasien[5] zu beobachtende Dominanz der Geometrie legt nahe, dass auch in der Steinzeit geometrische Fragestellungen aufkamen, selbstverständlich noch nicht aus Interesse an den abstrahierten Sachverhalten, sondern ausschließlich am konkreten Alltagsproblem orientiert. Wir können, wenn man den Umgang mit der Thematik in der Antike betrachtet, davon ausgehen, dass komplexe Zusammenhänge wie konstante Verhältnisse noch nicht auf abstrakter Zahlenebene, sondern vielmehr geometrisch festgehalten wurden. Gleichzeitig können wir aber auch annehmen, dass sich die Menschheit früh mit geometrischen Formen beschäftigte; so sind geometrische Formen Bestandteil vieler steinzeitlicher Höhlenmalereien, prominentes Beispiel ist hier die Cueva Pintada in Gáldar auf Gran Canaria.

Man kann davon ausgehen, dass der Mensch seine Erkenntnisse zu Proportionalität auch auf geometrische Formen, insbesondere den Kreis übertrug - es ist nicht schwierig, sich vorzustellen, dass der Mensch feststellte, dass man zum Malen „größerer“ Kreise (größerer Durchmesser) mehr Farbe benötigt, dass also bei größerem Durchmesser auch der Umfang des Kreises vergrößert wird.

In dem Moment, in dem das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises als proportional und konstant erkannt wurde, liegt die Wiege der Erkenntnisse um π. Die Menschheit hatte begriffen, dass es eine *Kreiszahl*, also eine fixe Proportionalitätskonstante, zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises gibt. Wir wissen also, dass beim Übergang von der Steinzeit in die Bronzezeit (in moderner, nicht zeitgemäßer Notation) folgendes bekannt war: Wenn D_K der Durchmesser eines beliebigen Kreises K ist und U_K der Umfang desselben Kreises, dann gilt:

$$\pi = \frac{U_K}{D_K} = const. \tag{2.1}$$

2.2 Quantifizierung und Verschriftlichung in der Bronzezeit

Unter den Hochkulturen der Bronzezeit (Epoche ab 2200 v.Chr) sind in Mitteleuropa und Kleinasien vor allem das Ägyptische Pharaonenreich sowie das Babylonische Reich hervorzuheben. Beide entwickelten sich aus den Ansammlungen sesshaft gewordener Menschen, die sich unter ähnlichen Bedingungen in klimatisch sehr warmen, stabilen Regionen in unmittelbarer Nähe zu mächtigen Flüssen, die für einigermaßen sichere Ernährung, Wirtschaft und Wohlstand sorgten, ansiedelten. Hier haben wir heutzutage Zugriff auf verschiedene Aufzeichnungen, die uns von beiden Kulturen geblieben sind. Neben tragbaren Schriftstücken (in Form von Papyrus, Tonta-

4. Der Beginn der Bronzezeit wird etwa mit dem Jahr 2200 v.Chr. angesetzt.

5. Tatsächlich kann man beispielsweise auch bei den Hochkulturen Mittelamerikas eine große Relevanz und einen beeindruckenden Entwicklungsstand der Mathematik feststellen (vgl. [López, 2007], „Introduction“ und [Beckmann, 1971], S.33), bedingt durch den Niedergang einzelner Hochkulturen, die gewaltsamen Eroberungszüge der Konquistadoren, gezielte Vernichtung „heidnischer“ Aufzeichnungen und die dadurch gegebene Dominanz europäischer Mathematik basiert die heutige Mathematik jedoch sehr viel weniger auf Erkenntnissen dieser Hochkulturen, weshalb diese für unsere Fragestellung kaum herangezogen werden können.

feln oder sogar Steintafeln) machen vor allem auch erhaltene Wandinschriften eine bedeutende Quelle aus. Wir wissen von anderen Hochkulturen, beispielsweise der minoischen auf der Peloponnes, sehr viel weniger aus der frühen Bronzezeit, weil die Verschriftlichung entsprechend später einsetzte beziehungsweise bedeutend weniger frühe Schriftstücke gefunden wurden[6]. Weiterhin wurde der Umfang unseres heutigen Wissens über die ägyptische Mathematik dadurch positiv beeinflusst, dass archäologische Forschung und Auseinandersetzung hier früher als bei allen anderen Hochkulturen begann, wie Beckmann (vgl. [Beckmann, 1971], S.23) darlegt.

Wir wissen aus den Aufzeichnungen von Äqyptern und Babyloniern, dass diese etwa um 2.000 v.Chr. nicht nur Kenntniss über die Bedeutung von π hatten, sondern sogar quantitativ einen ungefähren Wert kannten. Beckmann ([Beckmann, 1971], S. 12) nennt hier folgende approximativen Werte, die von den Hochkulturen benutzt wurden:

$$\text{Babylonien: } \pi = 3\,\frac{1}{8} = 3,125 \qquad \text{Ägypten: } \pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3,160 \tag{2.2}$$

Bei diesen Approximationen handelt es sich um beeindruckende Leistungen, da zu dieser Zeit kaum mehr Möglichkeiten als ganzzahlige Arithmetik (ohne Division) zur Verfügung standen. Eine Möglichkeit zur Berechnung von π mit den Mitteln eines ägyptischen Mathematikers des alten Reichs (2700-2200 v.Chr.) - Stäben, Seil und Sand - wird folgendermaßen beschrieben:

> *„Also finden wir einen relativ ebenen Fleck nassen Sandes entlang des Nils, treiben einen Stock hinein und befestigen ein Stück Seil daran mittels Schlaufe und Knoten, binden das andere Ende an einen zweiten Stock mit scharfer Spitze und zeichnen damit einen Kreis in den Sand, wobei wir das Seil gespannt halten. Wir ziehen den Stock im Zentrum wieder heraus, was ein Loch O hinterlässt. Nun nehmen wir ein längeres Stück Seil, wählen einen beliebigen Punkt A auf dem Kreis und ziehen das Seil von A über das Loch O bis es den Kreis am Punkt B schneidet. Wir markieren die Länge AB mit Kohle auf dem Seil; dies ist der Durchmesser des Kreises und unsere Maßeinheit. Nun nehmen wir das Seil und legen es in die kreisförmige Kuhle im Sand, beginnend am Punkt A. Die Kohlemarke ist an einem Punkt C auf dem Kreis. Nun legen wir es ein zweites mal an, diesmal beginnend bei C zu D, und ein drittes Mal von D in Richtung A, so dass der Durchmesser der Länge nach dreimal (und ein wenig mehr) in den Umfang des Kreises passt.“*
>
> - frei übersetzt nach Beckmann (vgl. [Beckmann, 1971], S. 13)

6. Im griechischen Sprachraum, um bei diesem Beispiel zu bleiben, markieren Illias und Odyssee des Dichters Homer, die etwa 800 v.Chr. niedergeschrieben wurden (so heutiger Forschungsstand in der Homerischen Frage), nach heutiger Sichtweise den Beginn der Verschriftlichung.

Mit dieser Methode erhalten wir grob den Wert $\pi = 3$, der sich auch in der Bibel[7] niedergeschlagen hat. Mittels Vergleich zwischen dem verbleibenden Stück und dem Durchmesser lässt sich der übrige Bruchteil abschätzen, wobei die Genauigkeit schon durch die verwendeten Mittel limitiert ist. Eine andere vorstellbare Methode mit den Mitteln bronzezeitlicher Mathematiker stellt ein Betrachten der Kreisfläche dar, indem kleine Kreissegmente zu einem Parallelogramm beziehungsweise Rechteck zusammengesetzt werden.

Wir können durch einige bedeutende Schriftfunde aus dem mittleren Reich (2137-1781 v.Chr.), Alten und Sonar nennen hier vor allem die Papyri Rhind (1550 v.Chr.) und Moskau (1850 v.Chr.)[8], mit Sicherheit sagen, dass im alten Äqypten die Geometrie vielseitigen Zwecken diente. Einerseits beruhen die bahnbrechenden, spirituell motivierten Architekturleistungen (allen voran die Pyramiden) auf vielfältigen geometrischen und astronomischen Erkenntnissen, andererseits hatte Geometrie eine große Alltagsrelevanz, da - nach Beschreibung des griechischen Historikers Herodot[9] - die Ägypter, die für die Landwirtschaft als Ernährungsgrundlage auf die jährlichen Nilschwemmen angewiesen waren, ihre Ländereien jährlich nach der Nilschwemme neu vermessen mussten, wofür selbstverständlich geometrische Kenntnisse extrem wichtig waren.

Zu diesem Zweck enthielten die genannten Papyri mathematisch-geometrische Aufgaben beziehungsweise Rätsel, die mittels exemplarischer Lösungen und Lösungstabellen das damals bekannte mathematische Wissen lehrten. Die Mathematik war im damaligen Verständnis also nicht wie heute aus ineinander greifenden und aufeinander aufbauenden Beweisstrukturen zusammengesetzt, sondern als nur gering abstrahierte und ansonsten rein konkrete Technik zur beispielorientierten Problemlösung zu sehen. Besonders bemerkenswert sind in diesem Zusammenhang die 48. und 50. Aufgabenstellung des Papyrus Rhind, die zwei von mehreren ägyptischen Methoden zur Abschätzung für die Kreiszahl π beinhalten, während die oben genannte Näherung von $4 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9}$ in dieser Form ausdrücklich auch in Aufgabe 10 des Papyrus Moskau vor dem Hintergrund einer Flächenberechnung für eine Halbkugel vorkommt[10]. Weiter lassen sich aus den Papyri schließen, dass weitreichende Kenntnisse in Algebra, Trigonometrie und Bruchrechnung beziehungsweise Arithmetik gegeben waren, die eine relativ genaue Bestimmung von π auf mathematischer Grundlage fernab von Steinen und Stöcken überhaupt ermöglichten.

Auch im bronzezeitlichen Mesopotamien erhob sich um diese Zeit eine Hochkultur, gegründet auf ähnlich günstigen Umständen wie die ägyptische: das Babylonische Reich (ab dem 19. Jahr-

7. bspw. 1. Könige 7,23: „von einem Rand zum andern zehn Ellen weit [...] dreißig Ellen lang war das Maß ringsum" - als Erklärungsansatz für die Ungenauigkeit des biblischen Werts führt Beckmann ([Beckmann, 1971] , S.16) die beginnenden Differenzen zwischen Glaube und Wissenschaft an, während Sonar ([Sonar, 1999] S.13) auch eine stärkere Verknüpfung des biblischen Stoffs mit den ungenaueren babylonischen Ergebnissen anführt.

8. vgl. [Alten, 2005], S.8ff. und [Sonar, 1999], Kapitel 1.1 zu Inhalten der Papyri und weiteren mathematisch bedeutsamen archäologischen Funden dieser Epoche

9. Herodot von Halikarnassos, 490-424 v.Chr., gemäß Cicero "Vater der Geschichtsschreibung", seine Schilderungen diesbezüglich beruhen auf Überlieferungen, wie Sonar (vgl. [Sonar, 1999], Kapitel 1.1) andeutet.

10. Insbesondere Kurt Vogel, [Vogel, 1959], S.66, liefert einen Beitrag zur Rekonstruktion von π aus der 48. Aufgabe des Papyrus Rhind; Jahnke (vgl. [Bottazzini et al., 1999] S. 20) fasst die entsprechenden Ergebnisse kompakt zusammen. Die Aufgabe 50 aus dem Papyrus Rhind sowie Aufgabe 10 aus dem Papyrus Moskau finden sich in Originaltext und Deutung beispielsweise im Internetprojekt [Williams, 1997] in Aufarbeitung durch Scott W. Williams.

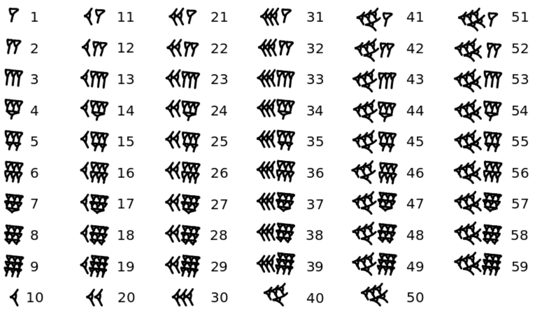


Abbildung 2.2: Die 60 verschiedenen babylonischen Zahlzeichen. Die Babylonier verwendeten ein konsequentes Stellensystem, so dass ein weiter links stehendes Zeichen einen größeren Wert repräsentiert, während in anderen Zahlsystemen, beispielsweise im römischen, grundsätzlich die einzelnen Wertigkeiten addiert wurden. Dieses addieren von Werten geschieht im babylonischen System (ausschließlich) innerhalb der einzelnen Ziffern, wie man unschwer erkennen kann. Siehe auch [Mastin, 2010], „Sumerian/Babylonian Mathematics“

hundert vor Christus), gelegen zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris. Wie die Hieroglyphen den Ägyptern, war die Keilschrift den Babyloniern der Zugang zu verschriftlichtem Wissen, das die Zeiten überdauert hat. Tatsächlich haben wir aus dem babylonischen Reich sehr detaillierte Funde, was nicht zuletzt auch damit zu tun hat, dass die oft verwendeten Tontafeln der Babylonier ein beständigeres Medium als der ägyptische Papyrus darstellt. Keilschrift wurde gewöhnlich mit den unterschiedlichen Auflageflächen eines Holzkeils in weichen Ton geritzt, der dann in der Hitze trocknete und erstarrte. Das Sexagesimalsystem[11], das Grundlage für babylonische Rechnungen darstellt, ist das erste quasi-moderne Zahlsystem, das konsequent für Rechnungen genutzt wurde. Abbildung 2.2 zeigt die Zahlzeichen in Keilschrift. Alten (vgl. [Alten, 2005], Kapitel 1.3) hebt historisch besonders die Herrschaft des babylonischen Königs Hammurapi I. (Regierungszeit 1792-1750) hervor, unter dem das babylonische Reich seine Blütezeit sowohl in mathematischer, wirtschaftlicher, als auch geopolitischer Hinsicht erfuhr.

Während die Babylonier, wie eingangs erwähnt, bezüglich π leicht unpräzisere Abschätzungen als die Ägypter erreichten, war ihre Mathematik nach Ansicht von Sonar (vgl. [Sonar, 1999], Kapitel 1.2) und nach Allem, was durch Quellen belegbar ist, im Allgemeinen deutlich ausgereifter als die der Ägypter[12], selbst wenn sich Methodik und Ausrichtung nicht stark unterschieden. So finden sich gleiche Lösungsstrategien in beiden Hochkulturen, beispielsweise die *Methode des einfachen falschen Ansatzes* zur Lösung von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten:

Alten beschreibt diese Methode ([Alten, 2005], S.30), die noch bis ins Hochmittelalter bekannt war und benutzt wurde, etwa so: die eine Unbekannte wird in der ersten Gleichung konkret durch eine Zahl, im Sexagesimalsystem naheliegenderweise 60, ersetzt. Daraus ergibt sich die zweite Unbekannte durch einfache, konkret-arithmetische Rechnung. In der zweiten Gleichung ergibt sich durch Einsetzen dann ein „falsches Ergebnis“ zum benutzten „falschen Ansatz“, das letztendlich über den Strahlensatz auch wieder nur mit konkreten arithmetischen Rechnungen

11. Zahlsystem zur Basis 60, aus dessen Tradition sich unsere Zeiteinheiten und das Gradmaß ableiten

12. Mastin weißt darauf hin, dass die Babylonier ein Symbol für die Null hatten, womit sie nicht nur den Ägypten, sondern auch den Römern und Griechen voraus waren - auch wenn dieses Symbol noch nicht konsequent verwendet wurde, wie die Zahlzeichen nahelegen (vgl. [Mastin, 2010], „Sumerian/Babylonian Mathematics“). Über eine konsequente Verwendung der Null verfügten erst die zentralamerikanischen Hochkulturen, allen voran die Maya, von denen diese Technik erst spät auf unsere Mathematik übertragen wurde.

auf das richtige Ergebnis zurückgeführt wird. Es fällt auf, dass dabei ausschließlich Rechnungen mit Zahlen, nie mit Symbolen oder Variablen, getätigt werden, was eine klare Limitierung bronzezeitlicher Mathematik auf konkrete statt abstrakte Problemstellungen aufzeigt. Es handelt sich um eine verhältnismäßig umständliche, aber notwendige Methode, solange keine formale Darstellung und Auffassung von Algebra bekannt war. Ähnliches erstreckt sich damit natürlich auch auf die Berechnung von π. Zwar lagen der Mathematik gegen Ende der Bronzezeit offensichtlich Werkzeuge vor, die auch bei geometrisch motivierten Problemstellungen symbolisches Rechnen ohne konkrete Gegenstände wie Steine und Stöcke ermöglichten, so war beispielsweise auch der Satz des Pythagoras als weitgehend abstrahierte Formel bekannt[13], es konnten aber noch keine umfassenden, komplexen Sachverhalte mathematisch beschrieben und allgemeingültig gelöst werden. Vielmehr konnte jede Annäherung an π nur mit konkreten Zahlen und ganz bestimmten, passenden Annahmen für sich alleine stehend gefunden werden.

Als Beispiel für Bereiche, in denen die babylonische Mathematik nach heutigem Wissensstand mächtiger als ihr ägyptisches Pendant war, ist neben dem stellenbasierten Zahlsystem vor allem die Algebra zu nennen, also das Lösen von verschiedensten Gleichungen und Gleichungssystemen mit den zugehörigen Techniken. In begrenztem Umfang waren die Babylonier in der Lage, quadratische und kubische Gleichungen zu lösen; besonders bemerkenswert sind in diesem Zusammenhang die Techniken zur recht genauen Bestimmung von Wurzeln; als Paradebeispiel gilt hier der fast erstaunlich genaue Näherungswert für $\sqrt{2}$ mit $1,414213$, der von vielen Quellen[14] exemplarisch angeführt wird.

2.3 Griechische Philosophen und römische Raufbolde

In Griechenland, das in der Bronzezeit durch die minoische Hochkultur und das mykenische Reich geprägt war, kam es in der späten Eisenzeit zu einem bisher unbekannten Phänomen: im Gegensatz zu den absolutistischen Monarchien, mittels derer in den klassischen eurasischen Hochkulturen mit dem Anspruch der Gottesgleichheit regiert wurde, bildete sich im antiken Griechenland ein vollkommen neues Regierungssystem heraus. Begünstigt durch den Fall des Hethiter-Reichs und des mykenischen Reichs fanden die verschiedenen unabhängigen griechischen Stämme zu neuer Macht und zu einem griechischen Gemeinschaftsgefühl; Alten führt hier die seit 776 v.Chr. abgehaltenen olympischen Spiele (vgl. [Alten, 2005], Kapitel 2.0) als deutliches Zeichen eines Nationalgefühls an, das die ansonsten unabhängigen griechischen Stämme, in der Zwischenzeit in Form von Stadtstaaten organisiert, zusammenhielt. Unter dem Schutz dieses auch militärisch erfolgreichen[15] griechischen Stadtstaat-Bündnisses erblühten die

---

13. vergleiche dazu die Erwähnung in [Sonar, 1999], S.10f sowie die Referenz in [Alten, 2005], S.30 auf eine exemplarische Lösung im altbabylonischen Text Susa C, die expliziet die formalisierte Aussage des Satz des Pythagoras verwendet.

14. vgl. [Alten, 2005], Kapitel 1.3.6 sowie [Sonar, 1999], Seite 13 u.v.m.

15. Beckmann ([Beckmann, 1971], Kapitel 3) weißt völlig zurecht darauf hin, dass sich die griechischen Stadtstaaten in einer Phase der politischen Machtfestigung und durch die verlustreich errungenen Siege in den Perserkriegen im griechischen Staaten mit ihren vielfältigen kulturellen Unterschieden untereinander zur Wiege neuer Ideen und Ansätze. In der relativen Freiheit der reichen Handelsstädte, unter der Schirmherrschaft von Bürgerrechten und Demokratie, hatten die freien Bürger unter den Bewohnern Zeit und Muße, um sich mit Kultur und Gedankenspielen zu befassen. Die griechische Philosophie, mit Konzentration auf die Kulturhochburgen von Athen und Kleinasien, die Grundlage für vielfältige mathematische Entwicklungen werden sollte, war geboren.

Der vielleicht wesentlichste Unterschied zwischen der philosophisch ausgerichteten Mathematik der Griechen und den Mathematikern der Bronzezeit liegt nach Alten ([Alten, 2005], S.49ff) in einer neu gefundenen Motivation, Mathematik zu betreiben. Während bisher die Entwicklung mathematischer Erkenntnisse immer an einen konkreten Nutzen gebunden war, begann die griechische Philosophie damit, das Denken *um des Denkens willen* zu betreiben. Während bisher nur die Ergebnisse von Rechnungen und dergleichen im Vordergrund standen, begann man sich jetzt für die Hintergründe der verwendeten Zusammenhänge zu interessieren und zu versuchen, diese logisch auf Fakten zurückzuführen. Diese neu gefundene Wichtigkeit der Deduktion geht konform mit der allgemeinen Entwicklung der griechischen Gesellschaftsspitze, die sich auch in anderen Fragen sehr gerne rhetorischer Mittel bediente, um eine ähnliche logische Deduktion in nicht-mathematischen Fragestellungen zu nutzen; so war es doch beispielsweise in der attischen Demokratie von enormer Bedeutung, ein Gegenüber durch logisches Argumentieren von der eigenen Meinung überzeugen zu können. Während es für uns heute selbstverständlich ist, mathematische Erkenntnisse durch logische Deduktion auf Grundlage weniger Axiome zu konstruieren, so liegt der Ursprung unserer modernen axiomatischen Mathematik in genau diesem Umdenken.

Eine sehr deutliche Vorreiterrolle in der griechischen Mathematik nahm wieder die Geometrie ein; dies ist einerseits sicher darauf zurückzuführen, dass geometrischen Erkenntnissen mit ihrem vielfältigen (auch praktischen) Nutzen eine besondere Aufmerksamkeit zuteil wurde, andererseits sind geometrische Beweise verhältnismäßig einfach nachzuvollziehen und zu akzeptieren. So ist es nicht verwunderlich, dass die „Elemente“ des griechischen Mathematikers Euklid, von Alten gewürdigt als Zusammenfassung des „mathematische(n) Wissen(s) seiner Zeit“ ([Alten, 2005], S.62) bei genauerer Betrachtung fast ausschließlich Themen behandelt werden, die sehr direkt mit der Geometrie verknüpft sind. Eine Rückführung auf geometrische Gegebenheiten, die man schon erforscht hatte, war den Griechen wichtiges Ziel mathematischen Denkens; die vorherrschende Meinung war dahingehend, dass sich die Mathematik allein durch die Geometrie erforschen und darstellen liese. Vor diesem Licht lässt sich auch erahnen, welche Rolle die Zahl π für die griechische Mathematik gespielt hat; das Problem der *Quadratur des*

antiken Machtgefüge beweisen mussten - angesichts dessen, dass hier einzelne Stadtstaaten mit ihren Differenzen untereinander gegen mächtige Großreiche Bestand hatten, ist das eine beachtliche Leistung. Auch in diesem Prozess spielte das griechische Zusammengehörigkeitsgefühl, wenn es auch nicht immer ungebrochen war, eine große Rolle.

Kreises[16] ist direkt mit der Frage nach dem genauen Wert von π verknüpft und eines der bekanntesten Probleme, die im antiken Griechenland gestellt, aber nicht gelöst werden konnten[17].

Beckmann hebt vor allem die vier griechischen Mathematiker Anaxagoras, Antiphon, Hippokrates und Hippias für ihre Bemühungen um die *Quadratur des Kreises* hervor (vgl. [Beckmann, 1971], S.37ff).

Auf Anaxagoras (ca. 500-428 v.Chr.) geht die erste Erwähnung des Problems zurück, das letztendlich einer Bestimmung von π gleichkommt: während der Philosoph, der in seinen Naturbetrachtungen und Theorien an die Grenzen der Staatsreligion gestoßen war, indem er die Sonne statt als Gottheit als Objekt beschrieb, im Jahre 430v.Chr. im Athener Gefängnis auf seinen Asebieprozess wartete, versuchte er sich an einer geometrischen Konstruktion, um einen Kreis in ein Quadrat zu überführen - diese gelang ihm selbstverständlich nicht, obwohl Zeitgenossen selbiges behaupteten.

Einige Jahre darauf, gegen Ende des 5. Jahrhunderts vor Christus, soll nach Überlieferung des Aristoteles ein gewisser Sophist namens Antiphon in Athen tätig gewesen sein. Wie Beckmann schildert, versuchte sich dieser an der Quadratur des Kreises, indem er in einem Gedankenexperiment zuerst ein möglichst großes Quadrat, und daraufhin ein möglichst großes reguläres Achteck in einen Kreis hineinzeichnete, um zu beobachten, dass dabei die nicht vom Polygon erfasste Fläche geringer wird. Seine Theorie bezog sich darauf, man könne durch eine sukzessive Verdopplung der Kanten des eingeschriebenen Polygon die nicht erfasste Fläche *erschöpfen*, bis das letztendlich vollkommen füllende Polygon mit dem Kreis deckungsgleich ist. Da Polygone grundsätzlich „quadriert“ werden können, schloss er darauf, man müsse dann auch den Kreis quadrieren können (vgl. [Alten, 2005], S.90). Leider wissen wir heute, dass dieses letztendlich füllende Polygon nicht erreicht werden kann, da wir im Gegensatz zu den Griechen, die nur von der Existenz endlicher Entitäten ausgingen[18], heutzutage über eine Vorstellung von Unendlichkeit verfügen, die uns Antiphons vermeintlich logische Schlussfolgerung auf die Existens eines solchen letztendlichen Polygons verbietet. Auch alternative Ansätze an diesem Gedankenkonstrukt laufen ins Leere. Nichtsdestotrotz verspricht diese Methode bei definierter notwendiger Genauigkeit eine Möglichkeit, einen Näherungswert für π zu bestimmen. Diese auf Antiphon zurückgehende Theorie hielt sich in abstrahierter Form unter der Bezeichnung Exhaustionsmethode (vgl. [Bottazzini et al., 1999], S.23) bis zur Entwicklung der modernen Analysis im 17. Jahrhundert n.Chr. auch unter Anhängern der Möglichkeit einer Quadratur des Kreises hartnäckig als potenzielle Beweismöglichkeit; letztendlich konnte mit dieser Methode jedoch nach Schilde-

16. Quadratur bezeichnet in diesem Zusammenhang ganz allgemein eine Flächenberechnung; in der Antike war es Usus, Flächen unbekannter Größe durch geometrische Konstruktion auf ein Quadrat selber Fläche zurückzuführen, dessen äquivalente Fläche dann exakt bestimmt werden konnte; auch als Rektifizierung bezeichnet.

17. Tatsächlich wurde von Ferdinand von Lindemann schließlich bewiesen, dass diese Quadratur durch Zirkel und Lineal nicht durchführbar ist; auf diesen Umstand werden wir noch zurückkommen.

18. Berühmt sind hier die Paradoxa des Zenon von Elea, die gegen die Unendlichkeit sowie Infinitesimalität als Konzept gerichtet sind. Diese galten im Altertum als gültig, wurden aber inzwischen argumentativ widerlegt. Eine anschauliche Illustration findet sich bei [Mastin, 2010], „Greek Mathematics“.

rung von Jahnke ausschließlich die Konstanz von π belegt werden, nicht aber Kreisflächen exakt berechnet werden. Auch von Sonar werden die Möglichkeiten der Exhaustionsmethode betont (vgl. [Sonar, 1999], S.38).

Gemäß der Beschreibung von Beckmann war der Mathematiker Hippokrates von Chios, der wie die beiden vorgenannten im 5. Jahrhundert vor Christus tätig war, der erste Mathematiker, dem es gelang, von Kreisbögen begrenzte Flächen zu quadrieren und damit exakt zu bestimmen. Jahnke (vgl. [Bottazzini et al., 1999], S.21) beschreibt die Methodik der Quadratur dieser Flächen, die als „Möndchen des Hippokrates" in die Mathematikgeschichte eingegangen sind, exemplarisch. Während man aus dieser Errungenschaft vielleicht Hoffnung auf eine Quadratur des Kreises, der ja selbst natürlich eine von (einem) Kreisbogen begrenzte Fläche ist, fassen kann, muss dem ein Dämpfer versetzt werden: Hippokrates konnte nur vier bestimmte, rektifizierbare Möndchen angeben, und selbst wenn auch noch weitere Möndchen[19] rektifizierbar sind, so gibt es nach Auffinden aller, die tatsächlich rektifizierbar sind, leider noch immer auch nicht-rektifizierbare Möndchen - vor dem Hintergrund der viel später nachgewiesenen Nicht-Rektifizierbarkeit des Kreises mit Zirkel und Lineal eine Notwendigkeit. Auch dieses Wissen ist uns durch Aristoteles (384-322 v.Chr.) überliefert, da Hippokrates eigene Aufzeichnungen nie gefunden werden konnten. Die Ironie an dieser Überlieferung besteht laut Beckmann darin, dass Aristoteles die beiden von ihm überlieferten Theorien für falsch hielt[20]

Der vierte griechische Mathematiker in Beckmanns Auflistung, Hippias von Elis, entdeckte mit seiner Trisektrix beziehungsweise Quadratrix eine Kurve, mit deren Hilfe er zunächst das Problem der Dreiteilung eines Winkels auflöste[21], und die dann gemäß Jahnke (vgl. [Bottazzini et al., 1999], S. 37) durch Deinostratos (um 350 v.Chr., überliefert durch Pappos von Alexandria etwa 300 n.Chr.) zur Quadratur des Kreises benutzt werden konnte. Dabei handelt es sich um eine kinematisch erzeugte Kurve, die unter einem im Viertelkreis rotierenden Arm entsteht, wenn dieser mit einer Linie geschnitten wird, die in gleichmäßiger Bewegung parallel zur Grundlinie in derselben Zeit dieselbe horizontale Strecke zurücklegt wie der Endpunkt des Arms. Eine exakte mathematische Beschreibung der Konstruktion findet sich bei Alten (vgl. [Alten, 2005], S.91); Abbildung 2.3 visualisiert die Konstruktionsvorschrift genauer. Gemäß Beckmann führte Pappos beziehungsweise Deinostratos zum Beweis der Rektifizierbarkeit des Kreises mittels der Quadratrix von Hippias einen Widerspruchsbeweis durch ([Beckmann, 1971], S.41f.); mit den Mitteln moderner Analysis (Grenzwertbetrachtung und Trigonometrie) kommt man dabei sogar auf einen direkten Zusammenhang zur Bestimmung von π (Beweis siehe [Bottazzini et al., 1999] S. 37f.):

19. Jahnke verweist hier auf Arbeiten von Wijnquist und Euler aus dem 18. Jahrhundert, die nachgewiesenermaßen ein hinreichendes Kriterium für die Rektifizierbarkeit eines Möndchens lieferten; vgl. [Bottazzini et al., 1999], S.22

20. Obwohl ihm der Beweis der Falschheit gemäß Beckmanns Aussage nie gelang (vgl. [Beckmann, 1971], S. 40).

21. Alten beschreibt dies ausführlich - trotz der inhaltlichen Überschneidung mit der Quadratur des Kreises, die uns im Laufe dieser Arbeit noch einmal begegnen wird, möchten wir hierauf nicht explizit eingehen. Interessierte seien verwiesen auf [Alten, 2005], S.93

Satz 1. *Angenommen in der Konstruktion gemäß Abb. 2.3 sei der Radius des Viertelkreises r und die Strecke b der Schnittpunkt der Quadratrix mit der Kante AB. Dann gilt:*

$$\frac{r^2}{b} = \frac{1}{2} r\pi$$

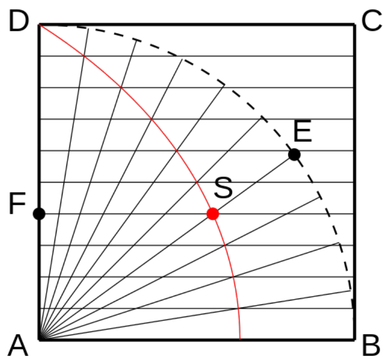


Abbildung 2.3: Konstruktionsskizze zur Quadratrix.
Kinematische Konstruktion: F und E beginnen gleichzeitig in D und erreichen die Punkte A beziehungsweise B nach Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit zum selben Zeitpunkt, wobei sich F über die Strecke DA und E über den Viertelkreis zwischen D und B bewegt; die Punkte der Quadratrix ergeben sich als Projektion S von F auf die bewegte Achse AE zu jedem Zeitpunkt.
Geometrische Konstruktion: Der Viertelkreis wird in n gleichgroße Winkelabschnitte geteilt, ebenso wird das Quadrat ABCD längs AD in n gleich hohe Streifen geteilt; dadurch ergibt sich aus dem Schnitt zwischen den grau eingezeichneten Begrenzungen von jeweils i-tem Winkelabschnitt und i-tem Streifen der i-te Punkt auf der Quadratrix, insbesondere aber kein eindeutiger auf der Strecke AB.

Leider weist auch diese Methode der Quadratur des Kreises einen Mangel auf, der nach Jahnke schon dem Mathematiker Sporos im 3. Jahrhundert nach Christus aufgefallen war: zur Konstruktion der Quadratrix können entweder, wie in obiger Definition, kinematische Mittel (Zeitbetrachtung, Geschwindigkeit, Bewegung) genutzt werden, oder lediglich geometrische Mittel, also Zirkel und Lineal. Der erste der beiden Fälle, und damit die gesamte obige Überlegung, ermöglicht die Quadratur, erfüllt aber nicht die Ansprüche der griechischen Mathematik, da die Konstruktion nicht ausschließlich mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann; die Quadratrix ist ein aus einer Bewegung entstandenes Konstrukt. Im zweiten Fall kann sie nicht komplett bestimmt werden, sondern sowohl Winkel als auch Höhe im Quadrat werden in gleich viele Abschnitte unterteilt und von der Quadratrix sind dann mit den Schnittpunkten nur einzelne Punkte bekannt. Das führt jedoch dazu, dass gerade der Schnittpunkt mit der Grundlinie, der für die Größe b unbedingt benötigt wird, nicht konstruiert werden kann (weil Höhenlinie und Arm hier parallel liegen und sich auf voller Länge schneiden); Alten weist explizit darauf hin, dass so nur endlich viele Punkte erhalten werden können (vgl. [Alten, 2005], S.93). Im Endeffekt müssen wir also entweder die geometrische Konstruierbarkeit oder die Rektifizierbarkeits-Eigenschaft des Kreises aufgeben; wir erhalten über die Quadratrix nie beide Erkenntnisse gleichzeitig (vgl. [Bottazzini et al., 1999], S. 38). Auch wenn die Methode damit nicht mehr den Ansprüchen der griechischen Mathematik genügt muss man dennoch betonen, dass damit durchaus eine Möglichkeit zur (im Rahmen des numerisch möglichen) genauen Berechnung von π gegeben ist, die viel später zu einer ersten analytischen Darstellung von π benutzt werden konnte. Wir wissen heute, dass Hippias mit seiner Quadratrix zufällig eine spezielle Art von Kurve (eine transzendente Kurve, vgl. [Beckmann, 1971], S.40) gefunden hat, die zwar die transzendente Zahl π

charakterisiert, aber mit den Mitteln griechischer Mathematik (genauer: auf Grundlage der 5 Axiome des Euklid, siehe [Beckmann, 1971], S.50) überhaupt nicht einzuordnen oder zu beschreiben war.

Nachdem im 5. Jahrhunder die einzelnen Stadtstaaten nur lose verbündet waren, das Bedürfnis nach Sicherheit und Frieden aber deutlich spürbar war, gab es verschiedene Versuche, länger andauernde, festere Bündnisse zu schmieden - was vor allem an der Frage danach scheiterte, wer in diesem Bund eine Vorherrscher-Rolle einnehmen sollte; so war gerade der Anfang des 4. Jahrhunderts v.Chr. durch Reibereien zwischen den Stadtstaaten, allen voran Sparta, Athen und Theben, geprägt, die des Öfteren auch in offenen Konflikten ausarteten. Schließlich gelang es Philipp II., dem König von Makedonien, einem ehemals eher unbedeutenden Königreich im nördlichen Griechenland, durch geschickte Politik seine Macht zu festigen und anschließend gegen Ende des 4. Jahrhunderts die anderen Bewerber um die Vormachtstellung im griechischen Staatengefüge zu unterwerfen. Unter Federführung der Makedonier wurde 337 v.Chr der Korinthische Bund gegründet, der nahezu alle griechischen Stadtstaaten auf Grundlage eines Eids hinter dem makedonischen König vereinte. Philipp II. wurde bald darauf ermordet, nach einer kurzen Phase der Instabilität ergriff sein Sohn Alexander, später der Große genannt, das Ruder im Staatenbund mit fester Hand und rüstete zum Krieg gegen das übermächtige Perserreich[22], das zu diesem Zeitpunkt unter Anderem die heutige Türkei und Mittelmeergebiete bis Ägypten und Lybien besetzt hielt. In einer Reihe militärischer Glanzleistungen drängte Alexander die eigentlich überlegenen Perser weit zurück, nahm in verhältnismäßig kurzer Zeit fast das gesamte Achämenidenreich ein und konnte unter anderem Ägypten besetzen. Nach Alexanders Tod zerfiel sein Großreich unter seinen bisherigen Statthaltern in einzelne Reiche, die daraufhin unabhängig, aber mit deutlich spürbarem griechischen Kultureinschlag, weiterexistierten. Alten hebt besonders Alexanders neugegründeten Städte hervor, viele davon unter dem Namen Alexandria, die frei und weltoffen waren (vgl. [Alten, 2005] S.56). In Ägypten regierte die griechischstämmige Dynastie der Ptolemäer, unter deren Herrschaft die Bibliothek von Alexandria begründet wurde. Diese entwickelte sich im 3. Jahrhundert vor Christus gemäß der Schilderungen von Beckmann (vgl. [Beckmann, 1971], S.48ff) zum Dreh- und Angelpunkt antiken Wissens, an dem vielfältige Werke, auch viele Originale, aus dem nun stark gewachsenen griechischen Kulturraum, zusammengetragen wurden. Es ist vor diesem Hintergrund nicht verwunderlich, dass der nächste große Beitrag zur griechischen Mathematik, der uns bis heute erhalten geblieben ist, aus der Feder eines ägyptisch-griechischen Mathematikers stammt, der an der Bibliothek in Alexandria tätig war: Euklid (Lebensdaten unbekannt, 3. Jahrhundert vor Christus). Wie bereits erwähnt stellen seine „Elemente" nach Alten (vgl. [Alten, 2005], S.62ff) eine Zusammenfassung der gesamten bekannten griechischen Mathematik dar und genügen mit ihren fünf geometrischen Axiomen, auf denen alle enthaltenen Erkenntnisse logisch aufgebaut

22. Achämenidenreich, erreichte in seiner Ausdehnung um 500v.Chr. im Westen den gesamten östlichen Mittelmeerraum von Kleinasien bis Lybien auf der einen Seite und die Grenze zu Indien auf der östlichen Seite.

werden, einer axiomatischen Mathematik im modernen Sinne. Unter anderem ist die Exhaustionsmethode durch Euklid überliefert.

In dieser Zeit lebte auf Sizilien, in Syrakus, einer griechischen Exklave, der griechische Mathematiker, Philosoph und Ingenieur Archimedes, der wie viele der bedeutenden Wissenschaftler seiner Zeit eine Ausbildung an der berühmten Bibliothek in Alexandria genossen hatte (vgl. [Alten, 2005], S.56); mindestens jedoch stand er mit den Gelehrten von Alexandria in Korrespondenz (vgl. [Bottazzini et al., 1999], S.26). Von Archmides stammt nach Beurteilung von Beckmann (vgl. [Beckmann, 1971], S.64ff.) einer der wichtigsten Beiträge zur Berechnung von π. Archimedes nahm die Prinzipien seiner Vordenker auf, insbesondere den Gedanken des Antiphon, einen Kreis mit regulären Polygonen sukzessive zu füllen, und ergänzte diese Methoden sinnvoll, so dass aus den guten Ansätzen seiner Vorgänger, die ins Leere gelaufen waren, nun erstmals verlässliche Ergebnisse folgten: Wie Antiphon schrieb auch Archimedes ein reguläres Polygon in einen Kreis ein. Im Gegensatz zu Antiphon versuchte er aber nicht, durch Verdopplung der Kanten irgendwann den Kreis flächendeckend zu erfassen (ohne Kenntnis von Unendlichkeit und Infinitesimalkalkül ein Ding der praktischen Unmöglichkeit), sondern stattdessen nahm er ein zweites Polygon mit selber Kantenzahl an, das den Kreis umschreibt, und nutzte diese beiden problemlos rektifizierbaren Formen, um π einzugrenzen. Dazu bestimmte er, wie Jahnke betont, den Umfang beider Polygone durch Rektifizierung und grenzt damit den Umfang des Kreises von beiden Seiten ein (vgl. [Bottazzini et al., 1999], S.25). Sein Ergebnis geht also nicht dahin, π *exakt* bestimmen zu wollen, sondern lediglich, den Bereich, in dem π liegt, mit vorher zu definierender Genauigkeit einzugrenzen. Archimedes selbst wählte für die Abschätzung in der von ihm gewünschten Genauigkeit ein 96-Eck und erhielt:

$$3\,\frac{10}{71} = 3,14084 < \pi < 3,142858 = 3\,\frac{1}{7} \tag{2.3}$$

Damit erreichte Archimedes eine Genauigkeit, die noch etwa 18 Jahrhunderte lang nicht übertroffen werden sollte; seine Methode stellt gewissermaßen das Optimum dar, dass man mit klassischer Mathematik und geometrischen Mitteln erreichen kann. Ein weiteres wichtiges Ergebnis, das auch später in Berechnungen eingesetzt werden sollte, erkannte Archimedes beim Vergleich des Kreises mit umschriebenen Dreiecken (vgl. [Sonar, 1999],S.59) - in einem seiner Werke beweist er, dass die Fläche eines Kreises mit Radius r der Fläche eines Dreiecks entspricht, dessen Grundseite der Länge des Kreisumfangs und dessen Höhe dem Radius entspricht, und mit der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks folgt:

$$A = \frac{1}{2}Ur \tag{2.4}$$

Es handelt sich, gerade in Zusammenhang mit der eingangs genannten Definition von π um die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises in Abhängigkeit von π und dem Kreisradius. Beckmann wirft zusätzlich ein, dass Archimedes in seinen Studien wahrscheinlich noch viel weiter ging, so berichtet Heron von Alexandria von einem archimedischen Ergebnis, das die untere Schranke bis auf $3,14163$ eingeschränkt haben soll - die zugehörige Schrift ist uns aber leider nicht bekannt (vgl. [Beckmann, 1971], S.66). Erst viel später und mit einem ganz anderen mathematischen Ansatz konnte π noch näher charakterisiert werden. Den Errungenschaften des Archimedes auf diesem Gebiet zu Ehren wurde π, freilich damals nicht als π bezeichnet und bekannt, bis in die Neuzeit *Archimedes-Konstante* genannt. Leider blieb auch Archimedes der Endlichkeit verhaftet und war nicht in der Lage, Aussagen über Grenzwerte und Unendlichkeit zu machen; genauso ergriff er nicht die Chance, eine umfassendere, allgemeine Theorie zu finden, sondern beschäftigte sich jeweils mit konkreten Einzelaufgaben (vgl. [Sonar, 1999], S.68).

Leider endet an dieser Stelle die glorreiche antike Mathematikgeschichte. Das Ende des 3. Jahrhunderts vor Christus stand unter dem Stern des Aufstiegs des römischen Reichs. Bis dato hatte Rom nur die Italienische Halbinsel unterworfen; nun erhob das römische Reich erstmals Anspruch auf Gebiete außerhalb Italiens. Die punischen Kriege sicherten die unanfechtbare Vormachtstellung im Mittelmeerraum; Sizilien war eine unter den ersten römischen Provinzen außerhalb Italiens und auch Syrakus, das eigentlich im Handstreich genommen werden sollte, fiel nach längerer Belagerung in die Hände der Invasoren. Archimedes von Syrakus, einer der genialsten Köpfe seiner Zeit, wurde bei der Einnahme der Stadt getötet[23]. Nicht viel später begann Rom, sich den gesamten Mittelmeerraum einzuverleiben - darunter auch die Staaten des ehemaligen Alexanderreichs. Während der römischen Vorherrschaft in Ägypten fand auch die große Bibliothek von Alexandria ihr Ende - sie wurde mehrmals bei verschiedenen Kämpfen in der Stadt beschädigt. Schließlich verbrannte der meiste Bestand an Schriftrollen als Julius Caesar versuchte, diese nach Rom zu verschiffen. Was an Schriften übrig blieb wurde durch die Folgen innerrömischer Konflikte weiter dezimiert - und fand schlussendlich nach weiteren Zerstörungen[24] unter christlicher Besatzung dann im 7. Jahrhundert nach Christus bei einer religiös motivierten Bücherverbrennung[25] durch die christlichen und arabischen Besatzer sein belegtes Ende. Wir verdanken den wenigen Werken, die in Abschriften oder sogar im Original der Zerstörung entkommen sind, sowie Zusammenstellungen wie der von Pappos von Alexandria[26], dass zumindest ein Teil des antiken wissenschaftlichen Wissens die Zeiten überdauert hat. Es benötigt kein Feingefühl, um zu bemerken, dass man in Beckmann keinen Freund des römischen Reichs findet; zu deutlich ist seine Abschätzigkeit gegenüber den Römern, die er pauschal als Rüpel bezeichnet und denen er vorwirft, kaum eine Innovation aus eigenem Antrieb entwickelt zu haben; stattdessen haben sie, so Beckmann, von den Errungenschaften unterworfener Zi-

---

23. Einer populären Legende nach soll sich der Philosoph geweigert haben, von den Eroberern Notiz zu nehmen und habe stattdessen weiter an einer Skizze arbeiten wollen. Ein solchermaßen ignorierter Soldat habe ihn dann im Zorn erstochen. (vgl. [Beckmann, 1971], S.61)

24. Während Theophilos von Alexandria das Patriarchenamt innehatte wurde im Jahr 391 vor dem Hintergrund von Kämpfen zwischen Heiden und Christen ein Tempel mit einer bedeutenden Zweigstelle der Bibliothek von Alexandria zerstört.

25. „if the books agreed with the Koran, they were superfluous; if they disagreed, they were pernicious. So they were burned." [Beckmann, 1971] S. 74

26. Alten betont, dass es das Ziel des Pappos war, das antike heidnische Wissen gegen das aufkommende Christentum zu verteidigen, siehe [Alten, 2005], S.59

vilisationen profitiert (vgl. [Beckmann, 1971], S.55ff). Besonders hebt Beckmann hervor, dass es im Bereich um π keine bekannten Neuerungen gegeben haben soll - sogar im Gegenteil. So schildert er, dass der römische Architekt Pollio Vitruvius auch noch im Jahr 15 nach Christus den Wert $3\,\frac{1}{8}$, also den schon im alten Babylon bekannten Schätzwert für π verwendet haben soll - in völliger Ignoranz der Errungenschaften der antiken Griechen. Wir müssen also festhalten, dass die Römer hinsichtlich unseres fokussierten Themas keinen nennenswerten Beitrag geleistet haben; eher noch ging durch die nachlässige Behandlung des Wissensschatzes der unterworfenen Völker ein großer Teil Wissen unwiederbringlich verloren. Das liegt unter anderem daran, dass den militaristisch fokussierten Römern zwar Ingenieurswissenschaften und andere Disziplinen mit konkret offensichtlichem Nutzen etwas galten, die abstrakte Mathematik, deren Nutzen sich erst auf den zweiten Blick in der konkreten Anwendung zeigt, verkannten und unterschätzten sie jedoch (vgl. [Sonar, 1999],S.80). Nach Mastin traf das nicht nur auf die Römer, sondern auch auf die darauf folgenden christlichen Herrscher zu (vgl. [Mastin, 2010], „Hellenistic Mathematics"). Entgegen der Darstellung Beckmanns finden sich bei Sonar Hinweise darauf, dass die griechische Mathematik auch unabhängig von den Römern in eine Sackgasse mit vorprogrammiertem Stillstand geraten war. Einerseits nennt Sonar hier die Vernachlässigung der mathematischen Zweige, die den Griechen als nicht verfolgenswert erschienen[27], andererseits war die griechische Mathematik auf wenige Orte und Personen zentriert, die nur begrenzte Kapazität und Möglichkeiten hatten. Durch die Ächtung der Unendlichkeit hatten sich die griechischen Mathematiker selbst deutliche Grenzen gesetzt, die schon bei so alltagsrelevanten Problemen wie π zu Tage traten.

2.4 Wissenschaft im Zeitalter der Religion

Schon während der Hochphase des römischen Kaiserreichs löste das Christentum das Heidentum als Staatsreligion ab. Während in der Antike die Grenzen der Wissenschaft, die durch die heidnischen Religionen gezogen wurden, eher am Rande spürbar waren[28], brachte die Änderung der Staatsreligion im römischen Reich eine neue Verschärfung mit sich. Vor dem Hintergrund der Abgrenzung gegenüber der alten, heidnischen Tradition wurden nun viele Schriften, die bislang als wichtig galten, als Ketzerei, oder doch zumindest als Werk aus der Feder von Heiden abgelehnt. Es mag sein, dass dafür ein Merkmal besonders relevant war, das den neuen, monotheistischen Religionen Christentum und Islam im Gegensatz zu den meisten bisherigen Religionen inhärent war: die Existenz einer heiligen Schrift. Während davor Glaube und Religion vor allem durch Überlieferung und Amtsausübung von Priestern bestimmt wurde und damit auch stark persönlicher Auslegung unterlag, gab es auf einmal Schriften, namentlich den Ko-

27. Eine genauere Erforschung der Algebra oder des Unendlichen hätten sehr viele neue Ergebnisse und Möglichkeiten aufgeworfen und schon Bekanntes vereinfacht, diese Bereiche erfuhren aber im griechischen Mathematikverständnis kaum bis gar keine Wertschätzung (vgl. [Sonar, 1999], S.79).

28. Beispielhaft seien hier die athenischen Asebie-Prozesse gegen Philosophen genannt.

ran und die Bibel, die von den Anhängern der jeweiligen Religion zur ausschließlichen göttlichen Wahrheit erhoben wurden. Während davor als gotteslästerlich galt, was eklatant gegen die Glaubensgrundsätze einer Bevölkerungsmehrheit verstieß, genügte es nun, einer der ins Detail festzementierten, verschriftlichten „Wahrheiten“ zu widersprechen oder bedeutende Sachverhalte zu vertreten, die sich nicht in der jeweiligen heiligen Schrift belegen ließen, um Gegenstand der Verfolgung durch Fanatiker zu werden - denn die religiösen Anhänge postulierten nicht nur die Wahrheitseigenschaft, sondern vertraten sogar eine Auffassung der Vollständigkeit. Als beispielhaftes Zeugnis dieser Ignoranz mag das schon erwähnte Beispiel der Bibliothek von Alexandria dienen, die nacheinander durch römische Ignoranz und dann sowohl durch christlichen als auch durch muslimischen Fanatismus vollständig zerschlagen wurde - und sogar 1000 Jahre danach wurden noch heidnische wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Altar des Glaubens geopfert[29].

Im Mittelalter war das Leben der meisten Menschen in Europa von harter Arbeit unter widrigen Bedingungen und der ständig begleitenden Angst vor dem Fegefeuer geprägt. Der Glaube besaß in weiten Teilen Europas nicht nur geistige, sondern auch weltliche Macht - am deutlichsten in Form von Fürstbischöfen oder auch dem Patrimonium Petri, dem späteren Kirchenstaat; ganz zu Schweigen von der Macht, die Instrumenten wie der Exkommunikation oder dem Ausrufen von Kreuzzügen innewohnte. Hinzu kam die machtpolitische, religiöse und kulturelle Spannung zwischen Christentum und Islam, die verhinderte, dass es zu einer größeren Bereicherung der europäischen Wissenschaft durch interkulturellen Austausch gekommen wäre - dieser fand fast ausschließlich im Bereich des Handels statt, bis ins 12. Jahrhundert gab es keinen einzigen Mathematiker, der aus dem ehemals weströmischen Reich stammte (vgl. [Beckmann, 1971], S.83). Alten betont besonders, dass auch die Kenntnisse über die Errungenschaften der Antike, also die Ergebnisse von Aristoteles, Platon und dem ägyptischen Astronomen Ptolemaios durch solcherartige Kontakte zwischen Muslimen und Christen in Europa überhaupt erst wieder bekannt wurden (vgl. [Alten, 2005], S.200); doch erst in der Renaissance kam das Bewusstsein für die antiken Autoren wieder flächendeckend in Mode. Deutlich spürbar war im ausklingenden Mittelalter, dass die Unterdrückung durch Religion und Inquisition durchaus regional unterschiedlich war - so erlangte man in einigen Regionen erst spät einen Zustand, in dem wieder einigermaßen frei vor der Angst vor Verfolgung geforscht werden konnte. Unter den späten Opfern des Wahrheitsmonopols der Kirche nennt Beckmann unter anderem die Wissenschaftler Giordano Bruno und Galileo Galilei, die noch in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts, also sogar noch weit nach der Reformation, unter das Joch der Inquisition gepresst wurden (vgl. [Beckmann, 1971], S.81).

29. Wie schon angesprochen, wurden viele Erkenntnisse der zentralamerikanischen Hochkulturen zum Opfer der Ignoranz der christlichen Eroberer. Die meisten Schriften der Maya, die unter anderem auch weit fortgeschrittenes mathematisches Wissen besaßen, wurden am 12. Juli 1562 durch Bischof Diego de Landa von Yucatán verbrannt, da er sie für Werkzeuge der Teufelsanbetung hielt.

Zu π gab es in Mittelalter und Renaissance nur wenig neue Erkenntnisse, die über die Leistungen des Archimedes hinausgingen. Beckmann nennt Fibonacci[30], der auf den Spuren von Archimedes erneut ein 96-seitiges Polygon nutzte und dank der zwischenzeitlichen Errungenschaften in dezimaler Arithmetik (wir erinnern uns, die Griechen nutzten bevorzugt Ganzzahlen) und der daraus resultierenden leicht größeren Genauigkeit auf einen Wert von $\frac{864}{275} = 3,141818$ für π. Auch Alten erwähnt Fibonacci ausführlich (vgl. [Alten, 2005],S.210). Dabei handelt es sich nach Beckmann um einen der wenigen Lichtblicke; und selbst die Erkenntnisse von Archimedes seien zu dieser Zeit wohl nicht flächendeckend bekannt gewesen, so dass bei vielen Autoren auf Grundlage völlig überholter Erkenntnisse diskutiert wurde; allenfalls in der Trigonometrie gab es noch leichte Fortschritte. Wir kommen aber nicht umhin, die bereits getätigte Aussage noch einmal zu bekräftigen: Es gab für etwa 18 Jahrhunderte nach Archimedes keinen methodischen Fortschritt in der Charakterisierung von π, sondern allenfalls numerische. Beckmann nennt Beispiele[31], die zeigen, dass diese typisch mittelalterlichen Phänomene des stockenden wissenschaftlichen Fortschritts nicht nur in Europa, sondern in anderer zeitlicher Abfolge ähnlich auf der gesamten Welt zu finden waren.

2.5 Aufbruch zur modernen Mathematik

Abbildung 2.4: François Viète (1540-1603)

In einiger Entfernung zum Machtzentrum der katholischen Kirche lebte im England des späten 16. Jahrhunderts ein Mathematiker[32] namens François Viète (sein Porträt ist in Abbildung 2.4).

30. Eigentlich Leonardo von Pisa, 1180-1250; der geläufige Name Fibonacci ist ein Spitzname.

31. vgl. [Beckmann, 1971], S.87 für Beispiele aus dem Orient, in Indien und China.

32. Genau genommen war Viète beruflich Anwalt und Politiker - in letzterer Profession erreichte er eine Mitgliedschaft im britischen Kronrat, dem damals mächtigsten britischen Regierungsorgan - die Mathematik betrieb er wie viele seiner Zeitgenossen vor allem in seiner Freizeit; allerdings war er mehrfach mit der Entschlüsselung feindlicher Nachrichten

Auf ihn gehen einige wichtige mathematische Neuentwicklungen zurück, Beckmann schreibt ihm unter anderm die Begriffe „negativ“ und „Koeffizent“ zu, die sich bis heute gehalten haben (vgl. [Beckmann, 1971], S.92). Alten schreibt ihm zu, die symbolische Algebra endgültig aus der Traufe gehoben zu haben und damit viele auf ihn folgende Leistungen erst ermöglicht zu haben, indem er unter anderem auf konsequente Verwendung von Symbolen setzte (vgl. [Alten, 2005], S.266). Unter Anderem nahm sich Viète auch der Zahl π an. Auch er näherte sich π auf die Weise an, die seine griechischen Vordenker aus der Antike ersonnen hatten, aber er gelangte zu einer neuen Form von Ergebnis. Beckmann erklärt, dass Viète über eine trigonometrische Konstruktion den Zusammenhang zwischen der Fläche eines n-seitigen Polygon und eines 2n-seitigen Polygon konstruierte (siehe [Beckmann, 1971], S.93); es ist davon auszugehen, dass dieser Beweisverlauf nicht exakt historisch ist. Jahnke führt die Entwicklung auch auf die Quadratrix von Hippias zurück (vgl. [Bottazzini et al., 1999], S.38). Letztendlich erreichte Viète durch Betrachtung einer gedachten unendlichen Fortsetzung dieses Verfahrens[33] (was den Griechen nicht möglich war, aber im 16. Jahrhundert langsam Einzug hielt) als erster Mathematiker eine *analytische Darstellung* von π:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot ... \tag{2.5}$$

Das Besondere an dieser neuen Darstellung ist, dass sie explizit zeigt, dass die Zahl π in ihrer Dezimaldarstellung kein Ende kennt - je genauer man versucht, sie zu berechnen (d.h. je mehr Faktoren man einbezieht) umso länger wird die Dezimaldarstellung. Während es in der Vorzeit und in der Antike darum ging, für π einen möglichst genauen Zahlenwert zu finden, um Probleme der realen Welt zu bewältigen, geht es nunmehr nicht vordergründig darum, eine möglichst genaue Dezimalzahl zu finden, sondern viel eher darum, die Zahl π in abstrakterer - und dadurch präziserer - Form zu beschreiben, als das mit einer Dezimaldarstellung möglich wäre. Ausgehend von dieser Entwicklung sollte sich nun und in der modernen Mathematik die Forschung um π nun in zwei Bereiche spalten: einen analytischen, der sich vor allem mit den Eigenschaften der Zahl π befasst, sowie einen numerischen, der in der Tradition der Antike versucht, mit immer effizienteren Methoden weitere Dezimalstellen von π zu berechnen. Viète selbst konnte mit seinem bahnbrechenden Ergebnis allerdings keine numerischen Erfolge erreichen - die Quadratwurzeln limitierten nach Beckmann die Genauigkeit drastisch und für die numerische Berechnung von π auf 9 Dezimalstellen genau griff er wieder auf die archimedische Methode zurück - mit einem $6 * 2^{16} = 393\,126$-kantigen Polygon, also 16-facher Kantenverdoppelung. Selbstverständlich war die Mathematik zu dieser Zeit auch noch weit von unseren Möglichkeiten entfernt - eine mathe-

---

betraut. Gerade in der Renaissance finden sich viele Mathematiker, die hauptberuflich künstlerische oder technische Berufe ausübten.

33. Hier kommt einem der Begriff Grenzwert / Limes in den Sinn, dieser wurde aber in moderner Form erst durch Cauchy etwa 200 Jahre später eingeführt. Viète benötigt den komplizierten Begriff Grenzwert - der ihm ja auch nicht zur Verfügung stand - hier allerdings nicht, da der Zusammenhang noch recht offensichtlich deduzierbar ist.

matische Notation von Operatoren und dergleichen war erst dabei, sich gegen eine sprachliche Umschreibung, wie sie in der Antike und im Mittelalter noch gebräuchlich war, durchzusetzen.

Abbildung 2.5: Ludolph van Ceulen (1540-1610), Pionier in der Berechnung von π

Schubert (siehe [Schubert, 1891]) stellte schon 1889 durch eine Beispielrechnung mit sehr großen Entfernungen heraus, wie irrelevant es für praktische Probleme ist, π auf mehrere hundert Stellen genau zu bestimmen[34]. Aber Mathematik und Wissenschaft folgt nicht immer einer reinen Kosten-Nutzen-Abwägung, deshalb gab es die schon erwähnte numerische Forschung - zunächst noch nur auf den Spuren des Archimedes. Während davor Genauigkeiten bis 6 Dezimalstellen normal waren, waren es bei Viète 1593 9 Dezimalstellen. Der Niederländer Adriaen van Rooman berechnete gemäß Beckmann im selben Jahr mit der archimedischen Methode 15 Dezimalstellen. Sein Landsmann Ludolph van Ceulen - abgebildet in Abbildung 2.5 errechnete auf die gleiche Art im Jahr 1596 20 Dezimalstellen von π genau, und er überbot sich in posthumen Veröffentlichungen von 1615 und 1621 selbst bis auf 35 Dezimalstellen. Beckmann nennt die Bezeichnung *Ludolphsche Zahl* für die Kreiszahl π als noch 1971 im deutschen Sprachraum geläufig - das zeigt, dass die Berechnungen des Ludolph van Ceulen zur bisher als archimedische Konstante genannten Zahl durchaus Beachtung fanden.

Im 17. Jahrhundert ereignete sich mit der Erfindung der Differentialrechnung[35] ein sehr großer Umbruch. Auf einmal konnte π über Reihen und Kettenbrüche dargestellt und mit den neu gefundenen Regeln der Konvergenz berechnet und ausgedrückt werden. Abraham Sharp verwendete im frühen 17. Jahrhundert eine Arkussinusreihe für die Berechnung von 72 Dezimalstellen, gefolgt von John Machin, der 1706 über die Differenz zweier Arkustangens 100 Dezimalstellen be-

34. Im Computerzeitalter ist tatsächlich ein Nutzen zum Test von Computersystemen und numerischen Verfahren erkennbar, worauf Arndt und Haenel hinweisen, dieses Argument galt aber zu dieser Zeit noch nicht und wäre zudem nicht auf π beschränkt. (vgl. [Arndt and Haenel, 2000],S.17)

35. Nach den Ansätzen von Sir Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz, die erbittert in einem Prioritätsstreit darum stritten, wer von beiden das Prinzip zuerst verstanden habe. (vgl. [Sonar, 1999] Kapitel 9.3) rechnete und dem Franzosen De Lagny, mit 127 Dezimalstellen im Jahr 1717. Speziell Machins Arkustangensformel sollte sich lange Zeit[36] zur Berechnung von π halten. Sie lautet:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \tag{2.6}$$

Erst 1794 errechnete Vega 140 Dezimalstellen über eine neu entdeckte Arkustangens-Reihe. Natürlich gab es auch auf diesem Gebiet Schwierigkeiten. Beckmann (vgl. [Beckmann, 1971], S.103) berichtet davon, dass William Rutherford 1824 ganze 208 Dezimalstellen berechnet hatte - jedoch ergaben die Berechnungen von 200 Dezimalstellen durch Johann Martin Zacharias Dase im Jahr 1844 sowie die von 248 Dezimalstellen durch Thomas Clausen 1847, dass Rutherford sich bei den letzten 55 Stellen verrechnet hatte. Rutherford glich diese Schmach durch 440 korrekt berechnete Dezimalstellen im Jahr 1853 aus, nur um 2 Jahre später von Richter überholt zu werden, der 500 Stellen von π angeben konnte. Auch in der Berechnung von 707 Stellen durch William Shanks im Jahr 1873 fanden sich Fehler, die Ferguson 1945 entdeckte - und eben jener Ferguson sollte schließlich zunächst 620 Stellen (1946), dann 710 Stellen (Januar 1947) und endgültig dann 808 Dezimalstellen (September 1947) finden. Mit dieser Anzahl endet die Dezimalstellenberechnung in ihrer bisherigen Form - von Hand - und wurde ab 1949 durch computergestützte Rechnungen ersetzt. Besondere Aufmerksamkeit lässt Beckmann dem Ergebnis von 1844 zukommen: Demnach handelte es sich bei Johann Martin Dase nicht um einen Mathematiker, sondern um einen Rechenkünstler. Die Berechnungsmethode, wieder eine Arkustangens-Formel[37], stammte demnach vom Wiener Mathematiker Schulz von Strassnitzky, der diese dem Schnellrechner Dase vorsetzte - Dase errechnete 200 korrekte Stellen von π daraufhin in weniger als 2 Monaten. Eine beachtliche Rechenleistung, die erklärt, warum Beckmann derartige Rechen-Genies überspitzt als Vorläufer moderner Computer bezeichnet. Ein weiterer Sachverhalt verleitet Beckmann zu diesem Vergleich: Dase selbst verfügte neben seiner enormen Rechenfähigkeit über keine nennenswerten mathematischen Kenntnisse, er wird sogar trotz seiner Fähigkeiten als in allen anderen Belangen stumpfsinnig beschrieben (vgl. [Beckmann, 1971], S.104) und hätte diese Berechnungen ohne die Anleitung durch Strassnitzky nicht durchführen können.

Im Zeitalter der Computerberechnung ist der Zuwachs von Dezimalstellen ins Unermessliche gestiegen. Arndt und Haenel (vgl. [Arndt and Haenel, 2000], S.1f) berichten von 2 Millionen Stellen im Jahr 1981, 30 Millionen Stellen im Jahr 1986, 8 Milliarden Stellen im Jahr 1996. Das Feld der Ziffernjäger dünnte sich währenddessen zusehends aus. Bis 1996 beteiligten sich David (*1947) und Gregory Chudnovsky (*1952) an der Jagd nach weiteren Stellen von π, seit dem Rekord von 1997 mit 51 Milliarden Stellen verfolgte Yasumasa Kanada (*1949) dieses Feld zunächst unangefochten, 1999 erhöhte er auf 68,7 Milliarden Stellen, 2002 noch einmal auf 1,24 Billionen Nachkommastellen. 2009 wurde er durch Daisuke Takahashi an der Spitze abgelöst (2,5

36. Fast exklusive Verwendung von 1650 bis mindestens 1973, siehe [Arndt and Haenel, 2000], S.13

37. $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$, vgl. [Beckmann, 1971], S.107

Billionen Stellen), mit Stand von 2013 wurden 12,1 Billionen Nachkommastellen berechnet[38]. Seit einigen Jahren ist die Suche nach weiteren Nachkommastellen von π kaum mehr eine Frage besserer Algorithmen, sondern vor allem eine Frage danach, wie schnell die Hardware-Entwicklung der Rechencomputer voranschreitet.

Etwa seit 1995 ist ein Paradigmenwechsel in der numerischen Forschung zu π erkennbar (vgl. [Arndt and Haenel, 2000],S.18ff). Statt weiter Sequenzen von Nachkommastellen Stück für Stück zu berechnen widmet man sich nun der Frage, wie man bestimmte Stellen von π möglichst effizient berechnen kann *ohne* dafür alle vorhergehenden Dezimalstellen zu kennen. 1995 entdeckten David Bailey, Peter Borwein und Simon Plouffe die folgende Formel, die nach den Nachnamen ihrer Entdecker *BBP-Reihe* genannt wird:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \tag{2.7}$$

Diese Formel, die sehr schnell sehr kleine Zahlen produziert, ist in der Lage, bestimmte Einzelstellen von π zu berechnen. Beflügelt durch diesen Fund wurden daraufhin weitere, ähnliche Formeln gefunden. Diese Formeln decken jedoch lediglich einen Teil der Dezimalstellen ab, beispielsweise hexadezimale im Fall der BBP-Reihe. Die numerische Forschung beschäftigt sich damit, weitere solche Formeln mit noch besseren Abdeckungen zu erzielen. Konkrete Algorithmen und eine weitergehende Erläuterung, sowohl zu den Details der Einzelstellenberechnung als auch zur BBP-Reihe an sich, können bei Interesse der sehr ausführlichen Beschreibung bei [Arndt and Haenel, 2000], S.117ff entnommen werden.

Wir haben den numerischen Forschungszweig umrissen; bleibt uns in der Betrachtung noch der analytischere Forschungszweig. Hier wurden interessantere methodische Entwicklungen gemacht wurden als im numerischen Forschungszweig, in dem lediglich immer weitere Dezimalstellen mit den immer selben Methoden berechnet wurden, ausschließlich durchbrochen vom Methodenwechsel von Archimedes Polygonen zur Differentialrechnung.

In Folge der Durchbrüche von Viète nennt Beckmann als nächsten Meilenstein die Methode des Willebrord Snellius (1580-1626), der ansonsten vor allem für seine Entwicklungen im physikalischen Gebiet der Optik bekannt ist. Auch er bediente sich indirekt der archimedischen Methode, allerdings versuchte er, eine Schwäche der archimedischen Methode auszugleichen. Snellius erkannte, dass die Schranken in Archimedes Methode unnötig weit auseinanderliegen, da der Bogen von beiden Polygonen - unabhängig von deren Kantenzahl - unnötig weit entfernt liegt. Er versuchte sich an verschiedenen geometrischen Konstruktionen, bis er 1621 die in Abbildung 2.6 gezeigte fand. Tatsächlich war er damit in der Lage, die Ergebnisse des Archimedes in punkto Genauigkeit zu überbieten. Schon bei Betrachtung des Hexagons erreichte er im Vergleich zum archimedischen $3 < \pi < 3,464$ die sehr viel genaueren Schranken $3,14022 < \pi < 3,14160$. Es

38. Shigeru Kondo und Alexander Yee, Ergebnisse auf `http://www.numberworld.org/` veröffentlicht - 2013 war der limitierende Faktor der benötigte Festplattenspeicher zum Speichern der Nachkommastellen.

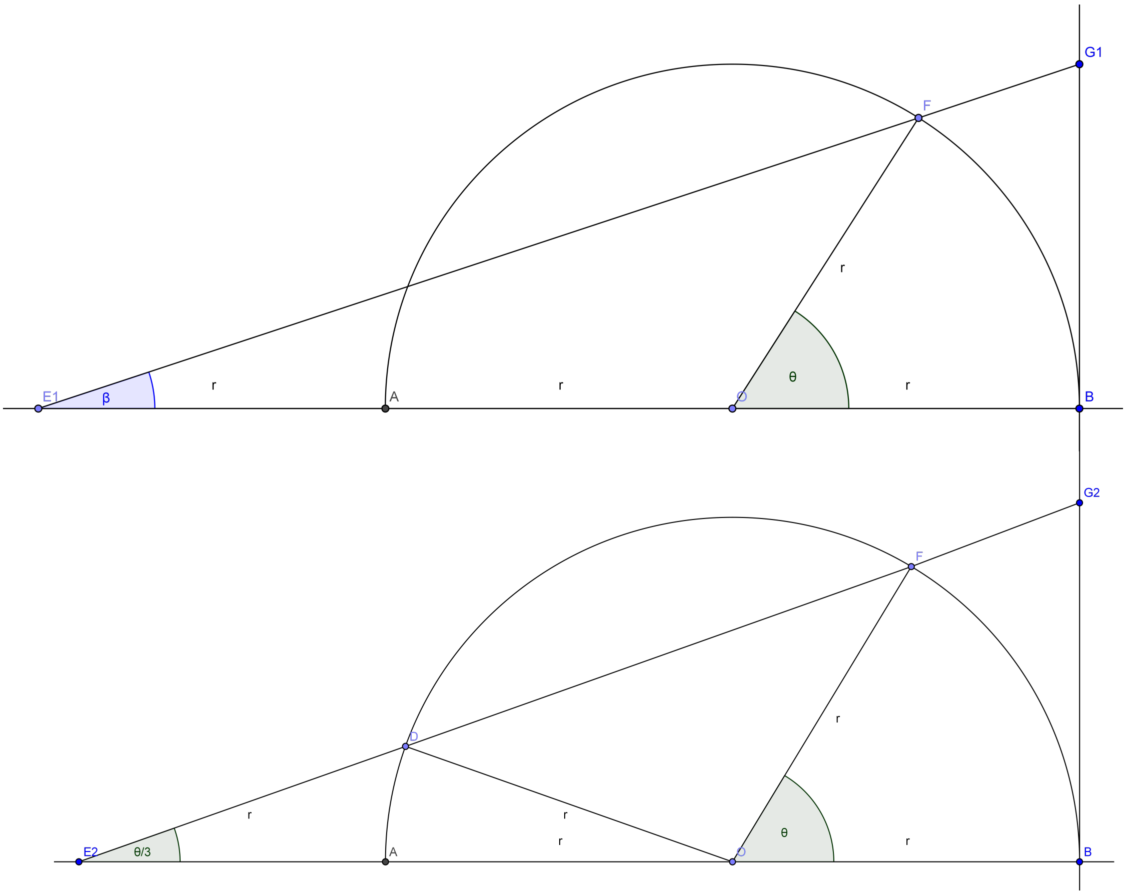


Abbildung 2.6: Konstruktionsskizze zu den Snellius-Huygens-Schranken.

Untere Schranke: Wähle E_1 so, dass die Strecke E_1A dem Kreisradius r entspricht. F kann beliebig auf dem Kreis gewählt werden. G_1 ist der Schnittpunkt der Gerade durch E_1 und F mit der Senkrechten auf B. Dann gilt: $BG_1 < \operatorname{arc} BF$

Obere Schranke: Wähle D beliebig auf dem Kreis. E_2 ist der Punkt auf der Gerade durch A und B, der zu D den Abstand r des Kreisradius hat. Dann ist F (vgl. untere Schranke) der zweite Schnittpunkt zwischen der Gerade durch E_2 und D und G_2 der Schnittpunkt dieser Gerade mit der Senkrechten auf B. Dann gilt: $\operatorname{arc} BF < BG_2$

Man erkennt insbesondere an den eingezeichneten Winkeln, wie sehr die historischen Probleme der Quadratur des Kreises und der Dreiteilung des Winkels miteinander verknüpft sind - möchte man zu gegebenem Punkt F sowohl die untere Schranke als auch die obere Schranke ermitteln, so muss, nach der freien Wahl von F für die untere Schranke, der Verlauf der Geraden durch E_2 und F durch Drittelung des Winkels θ ermittelt werden.

handelte sich also um einen enormen Effizienzgewinn im Vergleich und Ludolphs 35 Dezimalstellen von π konnten damit ohne größeren Aufwand nachgewiesen werden. Snellius musste den formalen Beweis für die Korrektheit seiner Methode schuldig bleiben, da er sie ausschließlich experimentell gefunden und überprüft hatte. Glücklicherweise konnte sein Landsmann Christian Huygens (1629-1695) 1654 schließlich den Beweis für die Korrektheit der Methode von Snellius nachliefern (vgl. [Beckmann, 1971], S.114). In Anerkennung dieser Leistung werden die von Snellius entwickelten Schranken auch Snellius-Huygens-Schranken genannt. Interessant ist an dieser Stelle auch, dass die Methode von Snellius und Huygens Gebrauch von der Bogenlänge im Kreis macht, statt wie andere Methoden, insbesondere archimedische, über Flächenvergleiche zu argumentieren. Szyszkowicz (siehe [Szyszkowicz, 2015]) stellt verschiedene Berechnungsmethoden für π hinsichtlich ihrer Effizienz (d.h. der Schnelligkeit ihrer Konvergenz) gegenüber. Insbesondere nennt er explizit die Formeln zur Berechnung der Schranken aus den geometrischen Bezugsgrößen, die wiederum an die Kantenzahl des berechneten Polygon angepasst werden können (Bezeichnungen angeglichen an Abb. 2.6):

$$BG_1 = \frac{3\ \sin(x)}{2+\cos(x)} < \quad \mathrm{arc}\ BF \quad < \left(2\ \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)+1\right)\tan\left(\frac{\theta}{3}\right) = BG_2 \tag{2.8}$$

Ein weiterer bekannter Mathematiker, Renè Descartes (1596-1650), den Alten als Begründer der analytischen Geometrie bezeichnet (vgl. [Alten, 2005],S.274), hielt viele seiner Ergebnisse unter dem Eindruck vom Schicksal des Galileo Galilei zurück. Nach seinem Tod wurden unter anderem Aufzeichnungen zur Bestimmung von π gefunden. Auch er bediente sich des Übergangs vom Polygon zum Kreis, allerdings von einem anderen Standpunkt aus. Wenn bisher bei Polygonen solange die Ecken verdoppelt wurden, bis sie sich der Fläche nach einem Kreis anglichen, so nahm Descartes ein Polygon bekannten *Umfangs* und verdoppelte die Kanten bei gleichbleibendem Umfang, bis sich das Polygon dem Kreis annähert. Auch bei Descartes wird also nicht mehr über die Fläche, sondern über die Bogenlänge argumentiert. Beckmann leitet die Formel von Descartes vom modernen Standpunkt aus her; während wir aus Platzgründen hier darauf verzichten (Snellius' Methode genügt als Exempel für eine trigonometrische Annäherung) finden Interessierte diese in [Beckmann, 1971] auf Seite 118. Andere Mathematiker wie Kochansky 1685 gaben weitere geometrische Konstruktionen zur (annähernden) Rektifizierung des Kreises an, andere verloren sich darin, schon bekannte Näherungswerte über Kettenbrüche anzunähern (vgl. [Beckmann, 1971], S.119).

In unseren Ausführungen zur numerischen Entwicklung haben wir nur knapp erwähnt, dass es eine Entwicklung von den anfänglichen geometrischen Berechnungsmethoden, die wir bislang behandelt haben, zu einer Verwendung der Differentialrechnung gab. Einer der Mathematikpioniere vor der Differentialrechnung war Blaise Pascal, der gemäß Beckmann über die Verwendung von Dreiecken die Fläche unter einer Sinuskurve berechnete und dessen Werk später Leibniz zur Integralrechnung inspirieren sollte (vgl. [Beckmann, 1971], S.124). Ähnlich wie Pascal die Fläche unter einem Sinus berechnete, schickte sich der Mathematiker John Wallis (1616-1703,

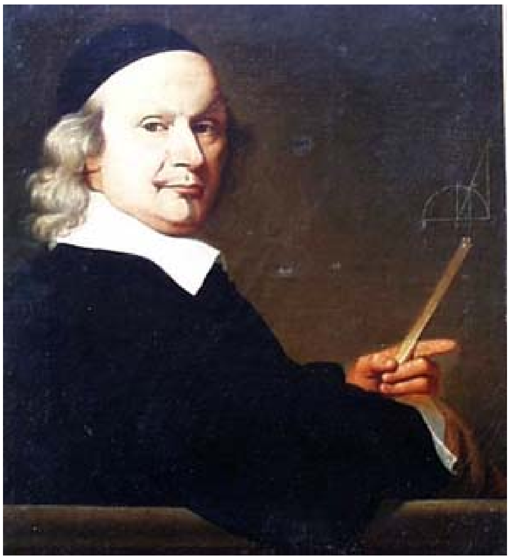


Abbildung 2.7: John Wallis (1616-1703)

Abbildung 2.7) an, die Fläche unter einem Viertelkreis zu berechnen. Dank der Entwicklungen von Descartes[39] konnte Wallis eine Gleichung für den Kreisbogen des Viertelkreises angeben - in modernen Symbolen[40] war sein Startpunkt also:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4} \tag{2.9}$$

Mangels der Erkenntnisse von Leibnitz und Newton zur Differential- und Integralrechnung konnte Wallis diese Formel nicht auflösen. Es gelang ihm jedoch durch mühsame Rechnungen, daraus eine Formel abzuleiten, das nach ihm benannte *walissche Produkt*:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \tag{2.10}$$

Auch hierbei handelt es sich um einen großen Fortschritt. Zwar hatte Viète schon vor Wallis eine geschlossene Form gefunden, aber das walissche Produkt bietet gegenüber der Formel von Viète einen ganz klaren Vorteil: zwar handelt es sich auch um eine unendliche Sequenz, es kommen dabei allerdings zum ersten Mal ausschließlich rationale Operationen, also keinerlei Quadratwurzeln oder ähnliches vor, die den Berechnungsprozess ausbremsen oder erschweren würden. Jahnke weist darauf hin, dass auf Walis viele weitere wichtige Entwicklungen zurückgehen - so prägte er als erster das Symbol ∞ für Unendlichkeit und fand mehrere Grenzwerte für komplizierte Reihen (vgl. [Bottazzini et al., 1999], S.80ff); insbesondere verwendete er das von ihm gefundene *walissche Produkt* schließlich für die Vereinfachung verschiedener Flächen-

39. Vom lateinisierten Renatus Cartesius leitet sich die Bezeichnung kartesische Koordinaten ab, vgl. [Beckmann, 1971], S.117

40. Weder das Integralzeichen noch das Symbol π für die Kreiszahl war damals bekannt oder gar gebräuchlich.

berechnungen. Gemäß Sonar war eins seiner Ziele die Berechnung von Flächeninhalten unter den Kurven von Exponentialfunktionen mit nicht notwendigerweiße natürlichem Exponenten (vgl. [Sonar, 1999],S.108), wobei er trotz seiner begrenzten Mittel auf passable Ergebnisse kam. Beckmann schreibt eine Neufassung des walisschen Produkts dem englischen Lord William, Viscount Brouncker (ca. 1620-1684) zu - dieser kam auf anderem Weg[41] zu einem äquivalenten Ergebnis in Form eines Kettenbruchs, der etwa hundert Jahre später als Spezialfall einer Reihenentwicklung des Arkustangens erkannt wurde:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \ldots}}}}} \tag{2.11}$$

Abbildung 2.8: James Gregory (1638-1675)

Der letzte Baustein zum Durchbruch wurde schließlich vom Schotten James Gregory (1638-1675, Abb. 2.8) geliefert. Besonders interessant ist, dass er als einer der ersten zwischen algebraischen und transzendenten Funktionen unterschied - und einen Versuch zum Transzendenzbeweis von π unternahm, der jedoch scheiterte (vgl. [Beckmann, 1971], S.132). Er entdeckte schließlich den Arkustangens als Fläche unter der Kurve $1/\left(1+x^2\right)$ und damit die Gregory-Reihe

$$\arctan\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \tag{2.12}$$

Auch hier blieb uns der Finder der Reihenentwicklung die Herleitung schuldig. Den für π entscheidenden Schritt, nämlich die Substitution von x durch 1 unternahm 1682 Gottfried Wilhelm Leibniz, und fand damit die wiederum im numerischen Forschungszweig wichtige Formel

41. Gemäß Beckmann ist zwar die Äquivalenz zum walisschen Produkt, nicht aber Brounckers Herleitung bekannt - vgl. [Beckmann, 1971], S.131

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right) \tag{2.13}$$

Leider wohnt all diesen Reihen ein großes Problem inne: sie konvergieren zwar gegen π, aber im Vergleich zu anderen Methoden sehr langsam, sind also für numerische Berechnungen verhältnismäßig untauglich. Beckmann schreibt, dass bei diesen Reihen nicht einmal 300 Terme ausreichen, um eine Genauigkeit für π von zwei Dezimalstellen zu erreichen. Inhaltlich äquivalent, aber in Symbolen und Ausrichtung unterschiedlich zu Leibniz' Differential- und Integralrechnung hatte Sir Isaac Newton (1642-1726) die Fluxionsrechnung[42] gefunden und konnte mit dieser Technik den Arkussinus als Fläche unter der Kurve $1/\sqrt{1-x^2}$ berechnen. Er kam damit auf die sehr viel schneller konvergierende Reihendarstellung

$$\pi = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + ...\right) \tag{2.14}$$

und auch eine andere Reihendarstellung findet sich in seinen Werken, in diesem Fall direkt als Fläche unter dem Kreisausschnitt mit Gleichung $y = \sqrt{x - x^2}$, und diese verwendete er selbst zur Berechnung von π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - ...\right) \tag{2.15}$$

Mit dieser Methode erreichte Newton, der von Alten als „wohl bedeutendster Naturforscher der Menschheit“ bezeichnet wird, eine Genauigkeit von 16 Dezimalstellen mit nur 22 Termen - was einem enormen Effizienzgewinn im Vergleich zur archimedischen Methode gleichkommt, die mit 96-Eck und vielen Quadratwurzeln nur auf zwei Dezimalstellen kommt.

Von großer Bedeutung für die Geschichte der Kreiszahl ist auch das Aufkommen des Symbols π. Beckmann erzählt vom Werk eines William Jones, Zeitgenosse von Newton, der 1706 in seinem Werk *Synopsis Palmariorum Matheseos* das Symbol π für die Kreiszahl verwendete, höchstwahrscheinlich als Abkürzung für das englische Wort *periphery* (Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1, siehe [Beckmann, 1971], S.145). Aufgrund dessen geringer Bedeutung als Mathematiker konnte sich die Notation hier jedoch nicht durchsetzen. Erst als Leonhard Euler (1707-1783, Abbildung 2.9) 1737 mit der Verwendung der Bezeichnung π begann setzte sich die Notation durch und wurde zum Standard, wie wir sie heute kennen.

Überhaupt war Euler nicht nur ein sehr wichtiger Mathematiker bezogen auf die Geschichte der Mathematik, sondern auch in Bezug auf die Geschichte von π. Von ihm stammen weitere Produktdarstellungen, beispielsweise ([Beckmann, 1971], S.153):

---

42. Während uns Leibniz' Kalkül heutzutage sehr geläufig ist, ist uns die newtonsche Sichtweise und Notation, die sich in Folge von Newtons Ausrichtung als Naturwissenschaftler sehr physikalisch-mechanisch liest, für die Differential- und Integralrechnung eher fremd. Jedoch gerade in der Physik finden auch heute noch einige der newtonschen Symbole für Spezialfälle Anwendung. Interessierte finden einen Überblick in [Bottazzini et al., 1999], S.97ff.

Abbildung 2.9: Leonhard Euler (1707-1783)

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot ... \tag{2.16}$$

Alten betont, dass Euler eine große Rolle für die Anerkennung und Erforschung der komplexen Zahlen spielte, auch das Symbol i entstammt ursprünglich seiner Notation (vgl. [Alten, 2005], S.286ff). Auch im Bereich der Erforschung von transzendenten Funktionen und allgemein in der Vereinheitlichung des Funktionsbegriffs spielte Euler eine wichtige Rolle (vgl. [Bottazzini et al., 1999], S.144). Von besonderer Bedeutung für die Zahl π ist neben der erwähnten Produktdarstellung auch der berühmte Satz von Euler, der den Zusammenhang zwischen exponentiellen und trigonometrischen Funktionen herstellt und auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ folgendermaßen definiert ist:

$$e^{ix} = \cos\ x + i\ \sin\ x \tag{2.17}$$

Dieser Satz sollte sich später bei den Transzendenzbeweisen für π als sehr nützlich herausstellen - wenn bisher vor allem mittels trigonometrischer Funktionen Aussagen über π gemacht wurden, standen dafür nun auch exponentielle Funktionen zur Verfügung. Er steuerte auch einige Kettenbrüche bei, die sich später als nützlich erweisen sollten; Beckmann nennt explizit Darstellungen für $\frac{1}{2}(e-1)$, $\tanh\ x$ und $\tanh\ \left(\frac{x}{2}\right)$ (siehe [Beckmann, 1971], S.157). Er erkannte in seinen späteren Werken auch explizit die Einzigartigkeit von π als Zahl, auch unter den transzendenten Zahlen, an.

Auch wenn wir nicht in vollem Umfang darauf eingehen werden, um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, darf die Wahrscheinlichkeitstheorie, und insbesondere die Monte-Carlo-Simulation zur Berechnung von π nicht unerwähnt bleiben. Die Wahrscheinlichkeitstheorie, zu deren Pionieren keine Geringeren als Bernoulli, Pascal, Euler, Laplace, Gauss und Poison zählen, ist ein wichtiger Zweig der modernen Mathematik mit vielfältigen praktischen Bezügen. Die wichtigste Entwicklung im Bezug auf π verdanken wir dabei ursprünglich George Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788). Er sollte das Problem („Buffonsches Nadelproblem") lösen, mit welcher Wahrscheinlichkeit geworfene Nadeln fester Länge aber zufälliger Orientierung und Lokalisation eine Linie schneiden. Dieses Problem konnte er in eine wahrscheinlichkeitstheoretische Formel umsetzen, in der bis π über einen Sinus integriert wird. Laplace schließlich nahm dieses Ergebnis als Ausgangspunkt, um durch eine Messung der Wahrscheinlichkeit (durch viele Proben, heutzutage computergestützt) bei bekannter Länge der Nadel auf ein Ergebnis für π zu kommen. Natürlich handelt es sich dabei um keine effiziente Methode - mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung lässt sich vorhersagen, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei N Stichproben ein bis auf x Stellen präzises Ergebnis für π zu erwarten ist - und um auch nur wenige Dezimalstellen mit hoher Wahrscheinlichkeit korrekt zu erhalten müssen schon zehntausende Proben herangezogen werden. Es ist der geringen Effizienz dieser Methode geschuldet, dass ihr praktisch verhältnismäßig wenig Relevanz zukommt. Eine ausführliche Beschreibung sowohl dieser Methodik als auch entsprechender Berechnungsalgorithmen findet sich bei [Arndt and Haenel, 2000], S.38f. Derartige Monte-Carlo-Simulationen sind in anderen mathematischen Bereichen, in denen es keine einfachen analytischen Beschreibungen gibt, sinnvoller einzusetzen (vgl. [Beckmann, 1971], S.165).

Abbildung 2.10: Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939)

Mit diesem Ausflug in die Wahrscheinlichkeitsrechnung wollen wir die Geschichte von π verlassen. Während in der Mathematikgeschichte bis zu diesem Punkt immer wieder Bedeutungswandel stattfanden, finden wir uns nun an einem Stand der Entwicklungen, der unseren heutigen Kenntnissen über die Eigenschaften von π entspricht: Schon 1767 konnten Johann Heinrich Lambert (1728-1777) und Adrien-Marie Legendre (1752-1833) die Irrationalität von π aufzeigen (vgl. [Beckmann, 1971], S.167ff). Joseph Liouville (1809-1882) konnte 1840 nachweisen, dass es transzendente Zahlen gibt. Georg Cantor (1845-1918) wies nach, dass es sogar überabzählbar viele transzendente Zahlen gibt. Von Charles Hermite (1822-1901) stammt der Beweis der Transzendenz der Eulerschen Zahl e, und 1882 konnte schließlich Ferdinand von Lindemann (1852-1939, Abbildung 2.10) über den Satz von Euler dadurch auf die Transzendenz von π schließen (vgl. [Arndt and Haenel, 2000], S.5). Dieser Beweis erfuhr über die Jahre mehrere Vereinfachungen, unter anderem durch Weierstrass, Stieltjes, Hurwitz und Hilbert (vgl. [Beckmann, 1971], S.172). Wir werden uns diesen Erkenntnissen in aktualisierter Form im nächsten Kapitel widmen, angelehnt an die von Hessenberg gegebene Fassung der Thematik ([Hessenberg, 1965]). Obwohl mit der Transzendenz von π auch bewiesen war, dass jedes Ansinnen der Rektifizierung des Kreises fruchtlos war - als transzendente Zahl ist π nicht mit klassisch-geometrischen Mitteln zu bestimmen - gab und gibt es weiterhin Scharlatane, Laien und Verschwörungstheoretiker, die sich weiterhin an der Quadratur des Kreises versuchten. Diesen wollen wir hier keinen weiteren Raum einräumen. Der numerische Forschungszweig wurde durch die Entwicklung des Computers revolutioniert - unter dem Einsatz von Computern gelten ganz andere Regeln für präzise Berechnungen als noch von Hand mit Papier und Bleistift, ganz zu schweigen vom enormen Effizienzgewinn und den Möglichkeiten, die durch die enorm schnelle Entwicklung im Hardware-Bereich gegeben sind; doch auch diese Thematik gehört nicht weiter als bisher schon genannt in den Rahmen dieser Arbeit. Arndt und Haenel weisen auf die extreme Popularität der Zahl π in Online-Gemeinschaften und anderen Vereinen der Hobby-Nerdkultur hin, auch diesem Thema werden wir uns nicht widmen, aber Interessierten sei [Arndt and Haenel, 2000], S.10ff. zur Lektüre angeraten.

3 Eigenschaften der Zahl Pi

Wir haben im vorhergehenden Kapitel sehr ausführlich die mathematikgeschichtliche Entwicklung zur Kreiszahl π wiedergegeben. Nur kurz umrissen hingegen haben wir die neuesten Entwicklungen um die Kreiszahl, die unserem heutigen Stand entsprechen. Dazu zählt einerseits die Frage, wie sich die klassisch über die (analytische) Geometrie definierte Konstante π in unsere axiomatisch aufgebaute Mathematik einfügt, in der die Geometrie nicht mehr länger zu den Grunddisziplinen zählt. Andererseits ist vor diesem Aspekt interessant, um was für eine Zahl es sich bei π handelt - wir hatten schon vor dem Hintergrund der geschichtlichen Entwicklung angesprochen, dass es sich bei π um eine transzendente Zahl handelt. Wir wollen nun aber noch vom Standpunkt moderner Mathematik aus die Bedeutung des Begriffs Transzendenz genauer umreißen und insbesondere den Transzendenzbeweis für π, den Ferdinand von Lindemann 1882 erbrachte, hier skizzieren. Bevor wir dieses Kapitel beenden, widmen wir uns noch kurz weiteren Eigenschaften aus dem Bereich der Statistik, die teils aktueller Gegenstand der Forschung sind und auf deren Erwähnung wir nicht verzichten wollen.

3.1 Definition in der modernen Analysis

Die moderne Analysis ist axiomatisch aufgebaut, wir gehen also von (so wenig wie möglich) Grundannahmen aus, die als prinzipiell gültig angesehen werden. Auf Basis dieser Grundannahmen definieren wir Begriffe und leiten aufgrund logischer Deduktion von diesen Annahmen Aussagen ab, die wegen ihrer absoluten Beweisbarkeit fest auf den Axiomen stehen und ihrerseits wieder für logische Schlüsse genutzt werden können. Wir wollen uns exemplarisch am Beispiel des Vorlesungsskripts [Mugnolo, 2012] ansehen, wie die Grundlage für eine modern-analytische Definition von π aussehen kann und wie diese Definition dann konkret vorgenommen wird. Im Wesentlichen spiegelt das Vorgehen in diesem Skript mit höchstens leichten Abweichungen das Vorgehen in mehreren Standardwerken zur Analysis wieder.

3.1.1 Mathematischer Unterbau

Als absolute Grundlage der modernen Mathematik in nahezu allen Bereichen gelten Logik und Mengenlehre - so auch bei [Mugnolo, 2012]. Zentral ist hier die Mengenlehre aufgrund der bekannten Definition von Cantor[1] sowie die Aussagenlogik als Beweismechanik für Sätze. Auf diesen Grundlagen bauen die Peano-Axiome auf, mit deren Hilfe die natürlichen Zahlen definiert werden. Mittels dieser ersten Menge von Zahlen lassen sich Begriffe wie Tupel und Relationen einführen. Auf dieser Basis wiederum werden Funktionen als Abbildungsvorschrift von einer Menge in eine Bildmenge definiert.

Die nächste notwendige Grundlage ist die Definition algebraischer Strukturen wie Gruppen, Ringe und Körper als Tupel von Zahlmengen und diesen zugeordneten Funktionen, die bestimmte Eigenschaften[2] erfüllen. Die Zahlmengen der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ entstehen als Gruppen- beziehungsweise Ringerweiterungen zu den natürlichen Zahlen; der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ stellt den kleinsten Körper dar, der eine isomorphe Kopie der rationalen Zahlen enthält. Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ wiederum ist der kleinste Körper, der eine isomorphe Kopie der reellen Zahlen enthält und eine Lösung für die Gleichung $x^2 = -1$ beinhaltet. Auf dem Weg zur Definition des Grenzwerts ist es wichtig, für Funktionen auf geordneten Körpern die Begriffe von Maximum und Supremum beziehungsweise Minimum und Infimum einzuführen; auch der Begriff der Norm ist für die Definition des Grenzwertbegriffs zentral; die meisten weiteren Begrifflichkeiten werden auf normierten Räumen[3] eingeführt. Die nächste wichtige Begrifflichkeit ist die Konvergenz gegen einen Grenzwert, sowie die Begriffe, die zum Grenzwert selbst, dem *limes*, führen, der auf besagten normierten Räumen definiert wird.

Für die Definition von π ist das Konzept der konvergenten Reihe (vor allem auf $\mathbb{C}$) zentral: Eine Reihe ist eine (unendliche) Summe über eine Folge in einem normierten Raum, die im Konvergenzfall gegen einen Wert strebt, mit dem die Reihe identifiziert wird. Die Konvergenz einer Reihe lässt sich über verschiedene Konvergenzkriterien, die selbst Sätze darstellen, beweisen. Für π benötigen wir eine Funktion, die sich über den Grenzwert einer absolut konvergenten Folge definiert - die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C} \tag{3.1}$$

3.1.2 Die Definition von Pi über die komplexe Exponentialfunktion

Wir haben gesehen, auf welchen Grundlagen die Exponentialfunktion definiert ist; gewöhnlich schreibt man für $\exp(z)$ auch e^z. Es gilt, wie diese Notation schon nahelegt:

---

1. „Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.", Georg Cantor, 1895

2. Je nach Struktur z.B. Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elements oder Existenz inverser Elemente in Bezug auf eine bestimmte zugeordnete Funktion

3. Normierter Raum: Vektorraum, der mit einer Norm versehen ist.

Satz 2. *Für die komplexe Exponentialfunktion gilt das sogenannte Gruppengesetz, das heißt sie genügt der Gleichung*

$$e^z e^w = e^{(z+w)} \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C} \tag{3.2}$$

Beweis. Nach dem Satz von Euler über die Konvergenz der komplexen Exponentialfunktion gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \exp(z)\exp(w) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \left(1 + \frac{w}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z + w + \frac{zw}{n}}{n}\right)^n \\ &= \exp(z + w) \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Mit diesem *Gruppengesetz* können wir zeigen, dass die Werte der Exponentialfunktion für ein rein imaginäres Argument immer auf der Einheitssphäre von $\mathbb{C}$, also dem Einheitskreis in zweidimensionaler Repräsentation, liegen:

Satz 3. *Es sei $x \in \mathbb{R}$, also $\Re(ix) = 0$ und $\Im(ix) = x$. Dann gilt:*

$$\left|e^{ix}\right| = 1$$

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Re(ix) = 0 \text{ also } \overline{ix} = -ix \tag{3.3}$$

und damit dann:

$$\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} \overset{(3.3)}{=\!=} e^{ix}e^{-ix} \overset{(3.2)}{=\!=} e^0 = 1$$

□

Wir können jetzt, angeregt durch die Visualisierung am Einheitskreis, folgende Definition rechtfertigen:

Definition 4. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt $\Re\left(e^{ix}\right)$ **Cosinus von x** mit Bezeichnung $\cos(x)$, während $\Im\left(e^{ix}\right)$ **Sinus von x** mit Bezeichnung $\sin(x)$ heißt. Sowohl Sinus als auch Cosinus sind damit Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Diese Definition macht sich zunutze, was Leonhard Euler erkannte: dass eine Verknüpfung zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen besteht, über den Zusammenhang

$$e^{ix} = \cos\, x + i\, \sin\, x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

Da wir schon aus anschauungstechnischen Gründen wissen, welche Bedeutung π in Bezug auf Sinus und Cosinus hat, können wir nun schlussendlich auf dieser Basis folgende Definition für π bemühen:

Definition 5. Die Zahl π wird dadurch definiert, dass $\frac{\pi}{2}$ die kleinste strikt positive Nullstelle von $\cos : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ist.

Wollen wir π ohne die aus praktischen Gründen eingeführten Funktionsbezeichnungen definieren, können wir dafür die Reihendarstellung der komplexen Exponentialfunktion bemühen:

Bemerkung. π ist damit ohne Verwendung trigonometrischer Funktionssymbole definiert als:

$$\pi := 2 \cdot \min \left\{ x \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \Im \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \right) = 0 \right\}$$

Letztendlich weicht diese Definition in der Essenz der Bedeutung von π natürlich nicht von der klassischen, geometrischen Definition ab. Auch die Identifikation von π mit einem Bogenmaß-Winkel ist im Kern der Sache geometrisch motiviert[4], wir können aber was die Bestimmung und Definition von π angeht auf ungenaue geometrische Mittel verzichten, da wir π trotz der geometrischen Motivation analytisch und auf sauberer axiomatischer Basis über einen Grenzwert definieren können.

Auch andere moderne Definitionen von π, zum Beispiel über andere trigonometrische Funktionen sind denkbar; wir haben beispielsweise in der Geschichte der Kreiszahl und insbesondere im Streben nach immer genauerer Berechnung schon verschiedene Arkustangens-Formeln für π kennengelernt. Die obige Definition als Nullstelle des Kosinus, die ursprünglich auf den Mathematiker Edmund Landau (1877-1938) zurückgeht, hat sich aufgrund seiner Einfachheit jedoch als besonders zweckmäßig für die Analysis herausgestellt.

3.2 Die Transzendenz von Pi

Eine der faszinierendsten Fragen in der geschichtlichen Entwicklung zur Kreiszahl π war die Frage, ob es möglich wäre, π mit einfachen (geometrischen) Mitteln anzugeben. Tatsächlich konnte gezeigt werden, dass dies nicht möglich ist, da π (wie im Übrigen auch die eulersche Zahl $e := \exp(1)$) zu einer ganz besonderen Klasse unter den reellen (beziehungsweise komplexen) Zahlen gehört: den transzendenten Zahlen. Wir wollen uns in diesem Abschnitt damit befassen, was die Transzendenz von π konkret für andere Merkmale von π bedeutet und schließlich einen Transzendenzbeweis in aktualisierter Form führen, wie von Fritsch vorgelegt

4. So ist das Bogenmaß ja die Bogenlänge am Kreisausschnitt des Einheitskreis mit dem entsprechenden Winkel, also gewissermaßen (ein Teil des) Kreisumfang in Abhängigkeit vom Radius, was ja der geometrisch motivierten Definition von π entspricht, und erst das Bogenmaß als Maß für den Winkel befähigt uns dazu, die Nullstelle des Cosinus mit π in Verbindung zu bringen. Auch die Identifikation des Cosinus mit dem Realteil von $e^{ix}, x \in \mathbb{R}$ ist anschaulich geometrisch motiviert.

(vgl. [Fritsch, 2003]). Auch der ursprüngliche Transzendenzbeweis durch Ferdinand von Lindemann aus dem Jahr 1882 liegt in Form der Aufarbeitung durch Hessenberg vor und wird einbezogen beziehungsweise umrissen werden (vgl. [Hessenberg, 1965]); sowohl Fritsch als auch Hessenberg arbeiten dabei auf Grundlage der Arbeit von Hilbert, der wie bereits erwähnt durch neues Grundlagenwissen Lindemanns Beweis vereinfachte. Insbesondere Hessenberg baut in seinem Werk den Transzendenzbeweis unter Einbezug der benötigten Grundlagen sukzessive auf, sodass wir interessierten Lesern für ein umfassendes Gesamtbild dieses Werk trotz der teils veralteten Mathematik und Sprache als Orientierung empfehlen können.

3.2.1 Von algebraischen und transzendenten Zahlen

Zunächst stellt sich die Frage, wie sich der Begriff Transzendenz überhaupt definiert. Fritsch referierte 1988 in einem Vortrag darüber, inwiefern die Transzendenz von e Erwähnung im Schulstoff finden sollte (vgl. [Fritsch, 1989]). Er verwendet bei seiner Einführung in dieses Thema die Folgende Definition:

Definition 6. Eine reelle Zahl x ist **algebraisch**, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ und ganze Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ mit $a_n \neq 0$ gibt, so dass gilt:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{3.5}$$

das heißt, wenn x Nullstelle einer ganzrationalen Funktion positiven Grades mit ganzen Koeffizienten ist. Falls $a_n = 1$ gewählt werden kann heißt x **ganz algebraisch**-

Aus der Definition folgt sofort, dass damit sowohl die rationalen Zahlen[5] als auch Wurzeln rationaler Zahlen[6] sowie Linearkombinationen zwischen diesen beiden Zahlenklassen algebraisch sein müssen.

Betrachtet man die Definition genauer, so fällt auf, dass die Menge der Gleichungen nach Schema von Formel (3.5) abzählbar ist: sowohl die Menge der möglichen Koeffizienten als auch die Anzahl der Summanden ist abzählbar unendlich, so dass die Menge der aus ihnen erhaltenen Gleichungen auch abzählbar ist. Damit ist die Menge der algebraischen Zahlen also zwangsläufig abzählbar. Gleichzeitig wissen wir aber, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (und damit auch die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$) überabzählbar sind. Daraus folgt, dass es überabzählbar viele Zahlen gibt, die zwar reell sind, aber nicht algebraisch.

Definition 7. Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, die nicht algebraisch ist, heißt **transzendent**.

---

5. Rationale Zahlen x lassen sich durch Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ als $x = \frac{p}{q}$ darstellen, was sofort eine entsprechende (lineare) Funktion liefert.

6. Für Quadratwurzeln kann man quadratische Gleichungen angeben, für Kubikwurzeln ganzrationale Funktionen vom Grad drei...

Wie Fritsch ausführt geht dieser Transzendenbegriff auf Joseph Liouville (1809–1882) zurück, der 1840 als erster deren Existenz beweisen und entsprechende Beispiele, die *Liouvilleschen Zahlen* beisteuern konnte. Auch Hessenberg weißt auf die Rolle von Liouville bezüglich der Pionierleistungen für den Nachweis transzendenter Zahlen hin (vgl. [Hessenberg, 1965], S.44). Wir werden in dieser Arbeit darauf verzichten, die Irrationalität von π herzuleiten, die vor der Transzendenz von π bewiesen wurde. Dies hat folgenden einfachen Grund:

Satz 8. *Jede transzendente Zahl ist irrational.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine transzendente Zahl. Angenommen, x wäre rational. Dann gäbe es gemäß der Definition rationaler Zahlen entsprechende $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{p}{q}$. Damit erfüllt x allerdings die Gleichung

$$qx + (-p) = 0$$

und ist damit eine algebraische Zahl, was einen Widerspruch zur Transzendenz darstellt. Demnach muss x irrational sein. □

Einen einfachen Beweis für die Irrationalität von π, ohne dafür die Transzendenz zu bemühen, präsentiert Fritsch im Anhang zu seinem Vortrag (vgl. [Fritsch, 1989] S.10); dieser geht auf Ivan Niven (1915-1999) zurück und wurde 1947 veröffentlicht. Auch Nahin (vgl. [Nahin, 2006] Kap. 3.1 „The irrationality of π.“) legt sowohl einen Irrationalitätsbeweis als auch einen Transzendenzbeweis vor, die in all ihrer Kürze auf den speziellen Ergebnissen anderer Mathematiker beruhen[7]. Diese Ergebnisse sind zwar genauso legitime Beweise, beruhen aber auf einer Vielzahl von Zwischenergebnissen, die ihrerseits wieder zu beweisen sind, während die ursprünglichen Transzendenzbeweise nach Lindemann und Hilbert einen mehr elementarmathematischen Standpunkt vertreten.

3.2.2 Vereinfachter Transzendenzbeweis nach Hilbert

Bevor wir uns aus Interesse noch den Lindemannschen Satz, den ursprünglichen Transzendenzbeweis für π, ansehen, wollen wir den Transzendenzbeweis in seiner durch Hilbert vereinfachten Form nachvollziehen, wie Fritsch ihn präsentiert (vgl. [Fritsch, 2003]), da der ursprüngliche Beweis durch Lindemann nur äußerst schwer nachzuvollziehen ist, wovon unter anderem der Umfang der Betrachtungen zum Lindemannschen Satz durch Hessenberg zeugt. Fritsch bemüht im Laufe seiner Fassung des Beweises nach Hilbert die folgenden Hilfssätze:

Lemma 9. *Für eine algebraische Zahl z mit zugehörigen normierten Polynomkoeffizienten*

$$a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$$

7. Verwendet wird beispielsweise die Erkenntnis des deutschen Mathematikers Carl Siegel (1896-1981), dass a^b transzendent ist, sofern a algebraisch aber weder 0 noch 1 und b nicht reell und rational ist.

ist $a_n z$ ganz algebraisch.

Beweis. Für $a_n z$ ist der Koeffizient mit dem n-ten Grad gerade gleich 1. □

Lemma 10. *Für alle natürlichen Zahlen n gilt:*

$$\int_0^\infty z^n e^{-z} \mathrm{d}z = n!$$

Beweis. Diese Formel folgt direkt aus der Definition der (komplexen) Exponentialfunktion. □

Weiterhin weißt Fritsch auf folgenden bekannten Hauptsatz über symmetrische Funktionen hin:

Satz 11. *Seien $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ mit $a_n \neq 0$, so gilt:*
a) Jede symmetrische Funktion in n Unbestimmten liefert angewandt auf eine algebraische Zahl, also auf die Wurzeln des Polynoms $P := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, einen rationalen Wert.
b) Ist $a_n = 1$, so liefert jede symmetrische Funktion in n Unbestimmten mit ganzen Koeffizienten angewandt auf die Wurzeln von P einen ganzen Wert.

Weiterführende Informationen zu den Grundlagen, insbesondere in Bezug auf symmetrische Funktionen, bietet Hessenberg in aller gebührender Länge in seinem Buch an (siehe [Hessenberg, 1965], S.87ff).

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, wollen also nun annehmen, π sei algebraisch. Betrachte $i\pi \in \mathbb{C}$ - als Linearkombination einer Wurzel[8] und einer nach Annahme algebraischen Zahl handelt es sich wieder um eine algebraische Zahl. Es existiert also ein normiertes Polynom P mit rationalen Koeffizienten mit $n := \mathrm{grad}(P)$ und $P(i\pi) = 0$. Dieses Polynom vom Grad n hat insgesamt n Nullstellen $z_1, z_2, ..., z_n$, wobei wir $z_1 = i\pi$ und $z_2 = -i\pi$ direkt annehmen können.

An dieser Stelle kommt die eulersche Zahl e ins Spiel, deren Verflechtung mit dem Transzendenzbeweis von pi schon mehrfach erwähnt wurde. Es gilt:

$$e^{i\pi} = -1 \tag{3.6}$$

also - gewissermaßen als Anwendung des umgangssprachlichen *Satz vom Nullprodukt* - gilt in jedem Fall:

$$0 = (e^{z_1} + 1)(e^{z_2} + 1)...(e^{z_n} + 1) \tag{3.7}$$

Führen wir die Bezeichnungen $y_1, y_2, ..., y_N$ mit $N = 2^{n-1}$ für alle N möglichen Summen der n $z_1, z_2, ..., z_n$. Weiterhin sollen diese Summen so numeriert sein, dass für ein $1 < M < N$ gilt:

8. i ist die komplexwertige Wurzel von -1 und wir hatten schon eingehend ausgeführt, dass Wurzeln rationaler Zahlen immer algebraisch sind.

$y_i \neq 0 \; \forall \; 1 \leq i \leq M$ und $y_i = 0 \; \forall \; M < i \leq N$. Dann können wir durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen folgende Formel erhalten:

$$0 = e^{y_1} + e^{y_2} + ...e^{y_M} + \underbrace{e^{y_{M+1}} ... + e^{y_N} + 1} \tag{3.8}$$

$$0 = e^{y_1} + e^{y_2} + ...e^{y_M} + \quad N - M + 1 \tag{3.9}$$

Gleichung (3.9) wurde ausschließlich aus der Annahme hergeleitet, dass es sich bei π um eine algebraische Zahl handelt. Es bleibt also nun für die Transzendenz von π zu zeigen, dass Gleichung (3.9) einen Widerspruch darstellt.

Wir betrachten nun folgende Polynome:

$$\begin{aligned}
P = P_1 &= (x - z_1) & \cdot \quad & (x - z_2) & \cdots \quad & (x - z_n) \\
P_2 &= (x - z_1 - z_2) & \cdot \quad & (x - z_1 - z_3) & \cdots \quad & (x - z_{n-1} - z_n) \\
P_3 &= (x - z_1 - z_2 - z_3) & \cdot \quad & (x - z_1 - z_2 - z_4) & \cdots \quad & (x - z_{n-2} - z_{n-1} - z_n) \\
&\vdots \\
P_n &= & & (x - z_1 - z_2 - \ldots - z_n) \\
P_\# &= & & P_1 P_2 P_3 \ldots P_n
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun das Polynom $P_\#$, welches durch Multiplikation der $P_1 \ldots P_n$ entsteht. Dessen Koeffizienten sind symmetrische Funktionen der z_i, also gemäß Satz 11 rationale Zahlen und sei c deren Hauptnenner. Die Nullstellen von $P_\#$ sind 0 ($N - M$-fach) sowie $y_1, y_2, ..., y_M$. Wir erhalten dann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner und Division durch x^{N-M} (Eliminieren der trivialen Nullstellen) folgendes Polynom mit $b_0, b_1, ..., b_n \in \mathbb{Z}$, $b_0, b_n \neq 0$:

$$Q = \frac{P_\# \cdot c}{x^{N-M}} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_M x^M$$

Q hat bis auf die trivialen Nullstellen die selben Nullstellen wie $P_\#$, also $y_1, y_2, ..., y_M$, die dann als Nullstelle eines Polynoms ganzzahliger Koeffizienten offensichtlich jeweils algebraisch sind, und daraus folgt wiederum mit Lemma 9, dass $b_M y_i \; \forall \; 1 < i < M$ ganze algebraische Zahlen sind.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ eine zunächst beliebige natürliche Zahl. Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, \quad z \mapsto b_M^M Q(z) \tag{3.10}$$

sowie das Integral

$$w_0 = \int_0^\infty z^k g(z)^{k+1} e^{-z} \mathrm{d}z \tag{3.11}$$

Dank Lemma 10 können wir letzteres (mit $c_0 \in \mathbb{Z}$) folgendermaßen schreiben:

$$w_0 = (b_M^M b_0)^{k+1} k! + c_0(k+1)! \tag{3.12}$$

Hilbert gelingt es nun, zu zeigen, dass bei geeigneter Wahl von k und Zahlen $s \in \mathbb{R},\ |s| < 1$ und $p \in \mathbb{Z},\ p \neq 0$ gilt:

$$\frac{w_0}{k!} \cdot (e^{y_1} + e^{y_2} + \ldots + e^{y_M} + N - M + 1) = s + p \tag{3.13}$$

Die Herleitung dieser Formel wollen wir in der hier vorliegenden Arbeit aussparen, da hier über mehrere Integrationen und geschickt gewählte Werte argumentiert wird, die an dieser Stelle keinen leicht verständlichen Mehrwert bieten und deren ausführliche Erläuterung den Umfang dieser Arbeit sprengt; der interessierte Leser sei hier auf [Fritsch, 2003], S.3f. verwiesen, wo die nötigen Rechenschritte umfassend erklärt werden. Für uns soll genügen, dass Hilbert durch geschickte Wahl von s und p zeigen konnte, dass mit der Wahl von k, so dass $k+1$ eine genügend große Primzahl[9] ist, obiger Sachverhalt erreicht werden kann.

Betrachten wir nun die rechte Seite in Gleichung (3.13), die keinesfalls 0 ergibt, so ist klar, dass die linke Seite auch nicht 0 ergeben kann. Also ist sowohl $w_0 \neq 0$ als auch $e^{y_1} + e^{y_2} + \ldots + e^{y_M} + N - M + 1 \neq 0$. Vergleichen wir nun mit Gleichung (3.9), so stellt letzteres genau den gesuchten Widerspruch dar.

Damit kann π nicht algebraisch sein und ist daher zwangsläufig transzendent.

3.2.3 Skizze des Lindemannschen Satzes

Wir haben mit dem nach Hilbert vereinfachten Beweis hier schon eine Beweisführung verhältnismäßig ausführlich diskutiert. Der ursprüngliche Beweis, der auf Lindemann zurückgeht, ist sehr viel ausufernder und komplexer, so, dass wir darauf verzichten wollen, den Satz mit seinem Beweis in voller Länge zu diskutieren. Wir wollen allerdings in Anerkennung der historischen Bedeutung dieser Pionierleistung wenigstens kurz den Gedankengang skizzieren und bedienen uns dabei der (sehr umfassenden) Aufarbeitung durch Hessenberg (vgl. [Hessenberg, 1965]). Hessenberg formuliert den Satz von Lindemann folgendermaßen:

Satz 12. *Eine* ***Exponentialform****, d.h. ein Ausdruck von der Gestalt*

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n} \tag{3.14}$$

hat einen nicht verschwindenden Wert, wenn folgende vier Voraussetzungen erfüllt sind:

---

9. Da es bewiesenermaßen unendlich viele Primzahlen gibt, existiert eine solche zwangsläufig, unabhängig vom konkreten Wert.

(V1) Je zwei der Exponenten c_λ sind voneinander verschieden.

(V2) Nicht alle Koeffizienten C_λ sind null.

(V3) Die Exponenten c_λ sind algebraische Zahlen.

(V4) Die Koeffizienten C_λ sind algebraische Zahlen.

Unter der Voraussetzung, dass der Lindemannsche Satz gilt (was tatsächlich der Fall ist), lässt sich daraus die Transzendenz von π sehr schnell folgern: Wie Hessenberg ausführt werden (V1), (V2) und (V4) durch die Exponentialform $E_\pi = e^0 + e^{i\pi}$ erfüllt. Es ist aber $e^0 = 1$ und $e^{i\pi} = -1$, somit also $E_\pi = 0$, was bedeutet, dass (V3) nicht gelten kann. Damit sind die Exponenten nicht algebraisch. Da 0 sehr wohl algebraisch ist, muss $i\pi$ nicht-algebraisch sein, und da i algebraisch ist (eine Begründung dafür haben wir schon angeführt) muss π transzendent sein.

In Bezug auf den Beweis des Lindemannschen Satzes weißt Hessenberg explizit auf den Umstand hin, der schon beim Hilbertschen Transzendenzbeweis klar geworden ist: Dass an vielen Stellen im Beweis ohne Begründung Annahmen gemacht werden müssen, die sich später als geschickt herausstellen und den Beweis ermöglichen, ohne, dass plausibel wird, wie die Annahmen zustande kommen (vgl. [Hessenberg, 1965], S.3). Nach länglichen Vorbereitungen führt Hessenberg den Beweis nach Lindemann konkret durch und bietet Beweisalternativen, auch hier sei der interessierte Leser auf Hessenbergs Ausführungen verwiesen (siehe [Hessenberg, 1965], S.97ff).

3.3 Statistische Untersuchungen

Nachdem klar wurde, dass π sowohl irrational als auch transzendent ist, ging das Interesse daran, eine möglichst genaue Repräsentation für π zu finden, spürbar zurück, stattdessen beschäftigte man sich nun mit anderen Fragen. So stellt sich bei einer nicht-abbrechenden Zahl wie π die Frage, inwieweit ihre Dezimalstellen zufällig verteilt sind, oder ob die Dezimalstellen von π einem gewissen Muster oder einer bestimmten Verteilung unterworfen sind. Unter diesem Aspekt ist auch die Frage nach der *Normalität* von π zu sehen, die unter anderem von Arndt und Haenel aufgeworfen wird (vgl. [Arndt and Haenel, 2000], S.21ff):

Definition 13. Eine Dezimalzahl heißt normal, wenn in ihrer Ziffernfolge jeder Ziffernblock vorkommt und Ziffernblöcke gleicher Länge gleich häufig auftreten.

Tatsächlich war π des Öfteren Gegenstand statistischer Untersuchungen, die zum Ziel hatten, die Frage, ob π eine normale Zahl ist, aufzuklären. Bis heute gibt es darauf allerdings weder eine eindeutige Antwort noch eine ganz klare Tendenz. Eng mit der Frage der Normalität ist auch die numerische Forschung nach Formeln wie der BBP-Reihe, die wir im Kapitel zur geschichtlichen Entwicklung angesprochen hatten, verknüpft - die numerische Forschung sucht nach Möglichkeiten, Vorhersagen über noch nicht erschlossene Dezimalstellen zu treffen, während die Frage danach, ob π eine normale Zahl ist, ja durchaus auch eine Beschränkung für die Möglichkeit von Vorhersagen darstellt. Arndt und Haenel weißen jedoch darauf hin, dass ein Vorkommen eines

Musters, also eine Vorhersagbarkeit, nicht automatisch die Normalität einer Zahl ausschließt. Einige kuriose sowie interessante Ergebnisse solcher statistischer Untersuchungen, die an dieser Stelle den Rahmen unserer Arbeit sprengen würden, wurden von Arndt und Haenel zusammengetragen und können dort nachgeschlagen werden (siehe [Arndt and Haenel, 2000], S.23ff). Die Untersuchungen zu dieser Thematik gehen allerdings über begründete Spekulationen und interessante Beobachtungen nicht hinaus.

4 Fazit und Schlusswort

Wir haben in dieser Arbeit die Kreiszahl π von den frühen Anfängen mathematischen Verständnisses in der Steinzeit bis zu ihrer Rolle in der modernen Strukturwissenschaft Mathematik durch die Menschheitsgeschichte verfolgt und einen Eindruck davon erhalten, wie unterschiedliche Menschen vor ganz verschiedenen zeitgeschichtlichen, kulturellen und motivationsbezogenen Hintergründen auf die Kreiszahl π zugegangen sind.

All jenen Mathematikern, Philosophen, Wissenschaftlern, Lebenspraktikern und Kreisquadrierern, die sich im Verlauf der Geschichte mit der Kreiszahl π beschäftigten, verdanken wir unser Bild und unser Wissen über die Kreiszahl π, von der auch heute noch eine rational nur schwer erklärbare Faszination ausgeht. Diese Faszination mag darin begründet sein, dass die Zahl π zwar oft in unseren Alltagserfahrungen vorkommt, für uns Menschen als sowohl irrationale als auch transzendente Zahl aber gleichzeitig die Grenzen der naiven Vorstellung übersteigt.

Umso entscheidender ist es, die Zahl π, wie es in den letzten zwei Jahrhunderten zusehends geschehen ist, auf eine gut untermauerte Basis der modernen Analysis zu stellen, um dadurch weitere Erkenntnisse zu sammeln. Die Frage nach der Vorhersagbarkeit einzelner Dezimalstellen in der Numerik, sowie die nach der Normalität in der statistischen Mathematik - also gewissermaßen die Frage nach dem Grad der Zufälligkeit in der Ziffernverteilung von π - sind spannende Forschungsgebiete, die mit bisher noch unentdeckten Erkenntnissen locken. Bezogen auf π können wir heute schon einige statistische Untersuchungen anstellen, die nur mit einer unfassbar großen Menge an Daten Aussagekraft besitzen - es wäre denkbar, dass uns π in diesem Sinne als Sprungbrett dienen kann, um allgemeine Theorien zu Transzendenz, Normalität und Vorhersagbarkeit zu untermauern oder zu widerlegen.

Während die Dezimaldarstellung von π erwiesenermaßen unendlich lang ist und auch der Wissensdrang der Menschen zur Kreiszahl π offenbar aus unserer bisherigen Erfahrung heraus keine Grenzen kennt, ist der Umfang der hier vorliegenden Arbeit endlich. Zum Abschluss wollen wir noch einem bedeutenden deutschen Mathematiker, der sich um die Erforschung der Kreiszahl π sehr verdient gemacht hat, den Raum bieten, seine persönliche Erklärung zu der Faszination, die π auf Menschen nach wie vor ausübt, anzubringen:

> „*Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.*"
>
> David Hilbert (1862-1943)

A Anhang: Ausdruck Onlinequellen

Gemäß der Erklärung zur wissenschaftlichen Arbeit muss für Quellen / Entlehnungen aus dem Internet der Ausdruck der ersten Seite vorliegen. Ein kompletter Abzug der Internetquelle liegt elektronisch gespeichert vor.

Ausdruck zu [Mastin, 2010]

The Story of Mathematics

FROM ITS ROOTS IN ANCIENT MESOPOTAMIA, EGYPT AND GREECE TO THE MATHEMATICAL REVOLUTIONS OF THE MIDDLE AGES AND THE AGE OF REASON TO THE COMPLEXITY AND ABSTRACTION OF THE MODERN ERA

SEARCH

HOME | THE STORY | MATHEMATICIANS | GLOSSARY | SOURCES | CONTACT

The Story of Mathematics

- Prehistoric Mathematics
- Sumerian/Babylonian Mathematics
- Egyptian Mathematics
- Greek Mathematics
- Hellenistic Mathematics
- Roman Mathematics
- Mayan Mathematics
- Chinese Mathematics
- Indian Mathematics
- Islamic Mathematics
- Medieval European Mathematics
- 16th Century Mathematics
- 17th Century Mathematics
- 18th Century Mathematics
- 19th Century Mathematics
- 20th Century Mathematics

List of Important Mathematicians

Glossary of Mathematical Terms

Sources

Contact

WELCOME TO THE STORY OF MATHEMATICS

The history of mathematics is nearly as old as humanity itself. Since antiquity, mathematics has been fundamental to advances in science, engineering, and philosophy. It has evolved from simple counting, measurement and calculation, and the systematic study of the shapes and motions of physical objects, through the application of abstraction, imagination and logic, to the broad, complex and often abstract discipline we know today.

From the notched bones of early man to the mathematical advances brought about by settled agriculture in Mesopotamia and Egypt and the revolutionary developments of ancient Greece and its Hellenistic empire, the story of mathematics is a long and impressive one.

The East carried on the baton, particularly China, India and the medieval Islamic empire, before the focus of mathematical innovation moved back to Europe in the late Middle Ages and Renaissance. Then, a whole new series of revolutionary developments occurred in 17th Century and 18th Century Europe, setting the stage for the increasing complexity and abstraction of 19th Century mathematics, and finally the audacious and sometimes devastating discoveries of the 20th Century.

Follow the story as it unfolds in this series of linked sections, like the chapters of a book. Read the human stories behind the innovations, and how they made - and sometimes destroyed - the men and women who devoted their lives to... **THE STORY OF MATHEMATICS**.

WHAT IS MATHEMATICS?

Mathematics may be defined as �the study of relationships among quantities, magnitudes and properties, and also of the logical operations by which unknown quantities, magnitudes, and properties may be deduced� (*Microsoft Encarta Encyclopedia*) or "the study of quantity, structure, space and change" (*Wikipedia*).

Historically, it was regarded as the science of quantity, whether of magnitudes (as in geometry) or of numbers (as in arithmetic) or of the generalization of these two fields (as in algebra). Some have seen it in terms as simple as a search for patterns.

During the 19th Century, however, mathematics broadened to encompass mathematical or symbolic logic, and thus came to be regarded increasingly as the science of relations or of drawing necessary conclusions (although some see even this as too restrictive).

The discipline of mathematics now covers - in addition to the more or less standard fields of number theory, algebra, geometry, analysis (calculus), mathematical logic and set theory, and more applied mathematics such as probability theory and statistics - a bewildering array of specialized areas and fields of study, including group theory, order theory, knot theory, sheaf theory, topology, differential geometry, fractal geometry, graph theory, functional analysis, complex analysis, singularity theory, catastrophe theory, chaos theory, measure theory, model theory, category theory, control theory, game theory, complexity theory and many more.

This is not intended as a comprehensive and definitive guide to all of mathematics, but as an easy-to-use summary of the major mathematicians and the developments of mathematical thought over the centuries. It is not intended for mathematicians, but for the interested laity like myself.

My intention is to introduce some of the major thinkers and some of the most important advances in mathematics, without getting too technical or getting bogged down in too much detail, either biographical or computational. Explanations of any mathematical concepts and theorems will be generally simplified, the emphasis being on clarity and perspective rather than exhaustive detail.

It is beyond the scope is this study to discuss every single mathematician who has made significant contributions to the subject, just as it is impossible to describe all aspects of a discipline as huge in its scope as mathematics. The choice of what to include and exclude is my own personal one, so please forgive me if your favourite mathematician is not included or not dealt with in any detail.

The main Story of Mathematics is supplemented by a List of Important Mathematicians and their achievements, and by an alphabetical Glossary of Mathematical Terms. You can also make use of the search facility at the top of each page to search for individual mathematicians, theorems, developments, periods in history, etc. Some of the many resources available for further study (of both included and excluded elements) are listed in the Sources section.

Back to Top of Page

Home | The Story of Mathematics | List of Important Mathematicians | Glossary of Mathematical Terms | Sources | Contact

Ausdruck zu [Williams, 1997]

Mathematicians of the African Diaspora

EGYPTIAN GEOMETRY

DETERMINING THE VALUE OF π

THE PYTHAGOREAN THEOREM

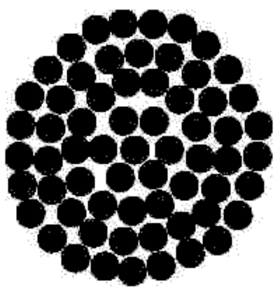
Sacred Geometry?

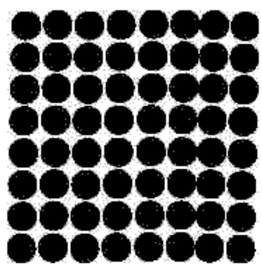
THIS PAGE IS UNDER CONSTRUCTION

Unfortunately, a great many school children are misslead into believing π is 3+1/7 = 3.142857 - accurate to < 1/100. It is a common fallacy is that the only computed π as 3+1/8 using the observation below that the area of a circle of radius is "close to" the area of a square 8 units on a side. Until recently, Archimedes of Syracuse (250 BC) was generally consider the first person to calculate pi to some accuracy; however, as we shall see below the Egyptians **already knew** Archimedes (250B.C.) value of π = 256/81 = 3 + 1/9 + 1/27 + 1/81, (the suggestion that the egyptians used 3 + 1/13 + 1/17 + 1/160 = 3.1415 for π is at best implicit) exhibited in the problem 50 below. The astronomer Ptolemy, of Alexandria AD 150, knew 3+10/71 <π <3+1/7 while in China in the fifth century, Tsu Chung-Chih calculate pi correctly to seven digits. Today, we "only" know π to 50 billion decimal places.

Note 1 *khet* is 100 cubits, and 1 meter is about 2 cubits. A *setat* is a measurement of area equal to what we would call a square khet.

An alternate conjecture exhibiting the value of π is that the egyptians easily observed that the area of a square 8 units on a side can be reformed to nearly yield a circle of diameter 9.





Rhind papyrus **Problem 50**. A circular field has diameter 9 khet. What is its area.

The written solution says, subtract 1/9 of of the diameter which leaves 8 khet. The area is 8 multiplied by 8, or 64 setat. Now it would seem something is missing unless we make use of modern data: The area of a circle of diameter **d** is $\pi (\mathbf{d}/2)^2 = \pi \mathbf{d}^2/4$. Now assume $64 = \pi\, 9^2/4 = \pi\, 81/4$, then $\pi = 3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 \sim 3.1605$. But 3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 is a number, presumably, intrinsically more pleasing to the egyptians than 3 + 1/13 + 1/17 + 1/160.

THE PYTHAGOREAN THEOREM

Moscow Papyrus Problem 10. line-by-line translation

Literaturverzeichnis

[Alten, 2005] Alten, H.-W. (2005). *4000 Jahre Algebra: Geschichte, Kulturen, Menschen*. Springer, Berlin; Heidelberg [u.a.], korr. nachdruck edition.

[Arndt and Haenel, 2000] Arndt, J. and Haenel, C. (2000). *Pi: Algorithmen, Computer, Arithmetik*. Springer, Berlin; Heidelberg [u.a.], 2., überarb. und erw. aufl. edition.

[Beaumont and Bednarik, 2013] Beaumont, P. B. and Bednarik, R. G. (2013). Tracing the emergence of palaeoart in sub-saharan africa. In *Rock Art Research: The Journal of the Australian Rock Art Research Association (AURA)*, volume 30-1.

[Beckmann, 1971] Beckmann, P. (1971). *A history of (Pi)*. St, Martin's Pr., New York.

[Bottazzini et al., 1999] Bottazzini, U., Epple, M., Fraser, C. G., Guicciardini, N., Hochkirchen, T., Lützen, J., Maanen, J. v., Panza, M., Siegmund-Schultze, R., and Thiele, R. (1999). *Geschichte der Analysis*. Spektrum Akad. Verl., Heidelberg; Berlin.

[Dantzig et al., 2005] Dantzig, T., Mazur, J., and Mazur, B. (2005). *Number: The Language of Science, The Masterpiece Science Edition*. Pi Press.

[Fritsch, 1989] Fritsch, R. (1989). Transzendenz von e im leistungskurs? In *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Band 42*, pages 75–80. Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Kiel. Online abrufbar unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/euler.pdf`, abgerufen 18. September 2016.

[Fritsch, 2003] Fritsch, R. (2003). Hilberts beweis der transzendenz der ludolphschen zahl pi. In *Differencial'naja geometrija mnogoobrazij figur, Band 34*, pages 144–148. Staatliche Universität Kaliningrad / Ludwig-Maximilians-Universtität München. Online abrufbar unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/pi.pdf`, abgerufen 18. September 2016.

[Hessenberg, 1965] Hessenberg, G. (1965). *Transzendenz von e und Pi: ein Beitrag zur höheren Mathematik vom elementaren Standpunkt aus*. Johnson, New York, nachdr. d. 1. aufl. von 1912, stuttgart, teubner edition.

[López, 2007] López, M. (2007). The discovery of the mesoamerican culture with math. T.H. Rogers School, Curriculum, `http://www.uh.edu/honors/Programs-Minors/honors-and-the-schools/houston-teachers-institute/curriculum-units/pdfs/2007/pre-columbian-mathematics/lopez-07-music.pdf` abgerufen am 21.08.2016.

[Mastin, 2010] Mastin, L. (2010). The story of mathematics: From its roots in ancient mesopotamia, egypt and greece to the mathematical revolutions of the middle ages and the age of reason to the complexity and abstraction of the modern era. http://www.storyofmathematics.com/. abgerufen am 19.08.2016.

[Mugnolo, 2012] Mugnolo, D. (2012). Analysis 1, vorlesungsskript. Technical report, Universität Ulm, Institut für Analysis.

[Nahin, 2006] Nahin, P. J. (c2006). *Dr. Euler's fabulous formula: cures many mathematical ills*. Princeton University Press, Princeton, N.J.

[Pletser and Huylebrouck, 1999] Pletser, V. and Huylebrouck, D. (1999). The ishango artefact: the missing base 12 link. In *Katachi University Symmetry Congress (KUS2), Tsukuba, Japan*, pages Paper–C11. T. Ogawa, S. Mitamura, D. Nagy & R. Takaki.

[Schubert, 1891] Schubert, H. (1891). The squaring of the circle. *The Monist*, 1(2):197–228. online abrufbar unter http://www.jstor.org/stable/27896849, abgerufen am 18. September 2016.

[Sonar, 1999] Sonar, T. (1999). *Einführung in die Analysis: unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entwicklung für Studierende des Lehramtes*. Vieweg, Braunschweig; Wiesbaden.

[Szyszkowicz, 2015] Szyszkowicz, M. (2015). Approximations of pi and squaring the circle. *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology*, 2(1):330–332. online abrufbar unter http://www.jmest.org/wp-content/uploads/JMESTN42350414.pdf, abgerufen am 18. September 2016.

[Vogel, 1959] Vogel, K. (1959). *Vorgriechische Mathematik. Teil I: Vorgeschichte und Ägypten*. Schroedel, Hannover.

[Vogelsang et al., 2010] Vogelsang, R., Richter, J., Jacobs, Z., Eichhorn, B., Linseele, V., and Roberts, R. G. (2010). New excavations of middle stone age deposits at apollo 11 rockshelter, namibia: Stratigraphy, archaeology, chronology and past environments. In *Journal of African Archaeology*, volume 8. Africa Magna Verlag. online abrufbar unter https://www.researchgate.net/publication/262840910_New_Excavations_of_Middle_Stone_Age_Deposits_at_Apollo_11_Rockshelter_Namibia_Stratigraphy_Archaeology_Chronology_and_Past_Environments?enrichId=rgreq-08e0241a7b4a3422f0c8d943b71670b6-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzI2Mjg0MDkxMDtBUzoxMDQ2MDQ0NjExNzQ3ODVAMTQwMTk1MTA1NjY1OA%3D%3D&el=1_x_2, abgerufen 18. September 2016.

[Williams, 1997] Williams, S. W. (1997). Mathematicians of the african diaspora: Egyptian geometry. http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt_geometry.html. The Mathematics Department of The State University of New York at Buffalo, abgerufen am 01.09.2016.

Abbildungsverzeichnis

Die Abbildung der ersten 333 Stellen von π auf der Titelseite ist von Flickr entnommen (https://www.flickr.com/photos/jorel314/3352784321). Der Rechteinhaber Jorel Pi veröffentlichte diese Abbildung unter der Lizenz CC0 ohne Vorbehalt von Nutzungsrechten jeglicher Art.

Name: Janosch Walter Zoller Matrikelnummer: 753134

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken, gegebenenfalls auch elektronischen Medien, entnommen sind, sind von mir durch Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. Entlehnungen aus dem Internet sind durch Angabe der Quelle und des Zugriffsdatums sowie dem Ausdruck der ersten Seite belegt; sie liegen zudem für den Zeitraum von 2 Jahren entweder auf einem elektronischen Speichermedium im PDF-Format oder in gedruckter Form vor.

Ulm, den ....

Janosch Walter Zoller