Kurzprotokoll zur Fragestunde 9a, 28.5.2020

Möglichkeit zum Vorgehen: S. 161 Nr. 2 (Mail-Antwort)

Es geht in der Aufgabe darum, zu prüfen, welche der Dreiecke rechtwinklig sind. Die Schwierigkeit besteht darin, dass das eine dreidimensionale Darstellung in deinem zweidimensionalen Buch ist - das bedeutet: Winkel, die in der Realität rechtwinklig sind, sind in der Zeichnung nicht mit 90% eingezeichnet.

Ein Beispiel: in Nr. 2 a gibt es das lila gefärbte Dreieck. An der Ecke G ist da im Dreieck ein rechter Winkel - das weißt du, weil es ja ein Quader ist, die Seitenflächen müssen also rechte Winkel haben. Im Buch ist der Winkel aber schräg gezeichnet, und es ist nicht offensichtlich, dass er rechtwinklig ist.

Es geht also in der Aufgabe darum, dir den dargestellten Körper im Kopf vorzustellen (wenn dir das schwerfällt kannst du auch ein Anschauungsobjekt in die Hand nehmen, zum Beispiel eine Schuhschachtel), und dich zu fragen, ob da in der Realität ein rechter Winkel ist oder nicht.

Du kannst dir helfen, indem du dir klarmachst, was auf jeden Fall im rechten Winkel zueinander steht: Die Kanten des Quaders und die Seitenflächen bzw. zwei aufeinandertreffende Kanten des Quaders sind immer im rechten Winkel zueinander.

Damit ist schonmal für folgende Dreiecke aus a klar, dass sie rechtwinklig sind:

- das lila Dreieck in a, da es die beiden Kanten HG und FG hat (und zwei Kanten sind beim Quader immer senkrecht zueinander)
- das gelbe Dreieck in a, da es die Kante AB hat und eine Seitenlänge auf der Seitenfläche ADHE liegt (eine Kante und eine Seitenfläche sind beim Quader immer senkrecht zueinander)

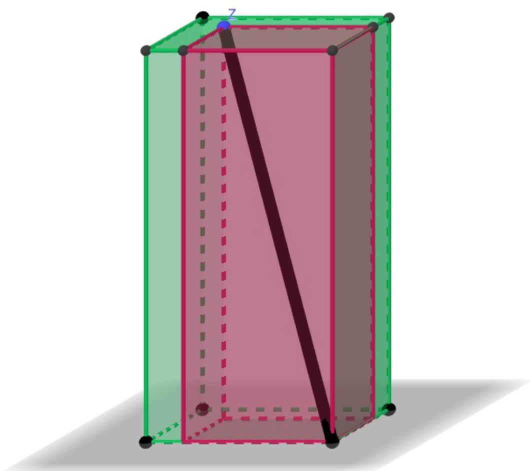
Das rote Dreieck in a ist tatsächlich nicht rechtwinklig: die Diagonale der einen Seitenfläche ist nicht senkrecht zur Diagonale einer anderen Seitenfläche. Du kannst das mit einem Schuhkarton ausprobieren: Versuch mal, dein Geodreieck so in die Ecke zu halten, dass die beiden kurzen Seiten entlang der Seitendiagonalen verlaufen - das funktioniert nicht (außer bei einem Würfel - deshalb der Schuhkarton als nicht-würfelförmiger Quader)!

In Teilaufgabe b sind alle Dreiecke rechtwinklig. Finde dafür Begründungen wie oben!

Wie kann man den Quader in Aufgabe 9, S. 162, verkleinern?

Problem: Wir können keine beliebige Strecke irgendwo schräg im Quader berechnen. Wir können aber die Raumdiagonale berechnen. Wir müssen also den Quader so verändern, dass das Röhrchen genau in der Raumdiagonale steht. Dazu brauchen wir einen Quader, bei dem Z die obere linke Ecke ist. Der verkleinerte Quader hat also die Abmessungen:

Breite: 4cm Höhe: 10,5cm Tiefe: 2,5cm



Dieser verkleinerte Quader ist rechts in Rot dreidimensional dargestellt. Der grüne Quader ist der Trinkbehälter. Der Strohhalm ist schwarz.
Abbildung als Geogebra-Datei: **https://t1p.de/x93nk**

Von diesem Quader ist das Röhrchen die Raumdiagonale, wir können also mit dem S.d.P. im Raum rechnen:

$$d=\sqrt{(4\,cm)^2+(10{,}5\,cm)^2+(2{,}5\,cm)^2}\approx 11{,}51\,cm$$

A.: Das Röhrchen muss mindestens 11,51cm lang sein, um nicht im Trinkbehälter zu verschwinden.

S. 163 Nr. 12 – gemeinsame Lösung

Wir brauchen für das Volumen des Quaders alle Seitenlängen.

Wichtig: Schau dir die Skizzen im Buch genau an und/oder fertige eine Faustskizze an, in der du weiteren Strecken Bezeichnungen geben kannst!

a) Seitenlänge AB (Breite des Quaders) ist gegeben: 4cm

Das Dreieck ABD ist rechtwinklig. Das können wir nutzen, um die Tiefe AD des Quaders zu bestimmen: $\tan(42°)=\frac{GK}{AK}=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{4\text{cm}}$ → umstellen: $AD=\tan(42°)\cdot 4\,cm\approx 3{,}60\,cm$

Das Dreieck ADE ist rechtwinklig. Das können wir nutzen, um die Höhe AE des Quaders zu bestimmen: $\tan(30°)=\frac{GK}{AK}=\frac{AE}{AD}=\frac{AE}{3{,}6\text{cm}}$ → umstellen: $AE=\tan(30°)\cdot 3{,}60\,cm\approx 2{,}08\,cm$

Das bedeutet: Das Volumen des Quaders beträgt V = 4cm * 3,6cm * 2,08cm = 29,952 cm³

b) Die Breite des Quaders (AB) ist gegeben: AB = 6cm

Die Tiefe des Quaders (FG) ist gegeben: FG = 8cm

Es fehlt noch die Höhe. Wir bezeichnen den Mittelpunkt der Fläche EFGH als M. Wir wissen: Die Strecke DM beträgt 13cm.

Das Dreieck DMH ist rechtwinklig. Die Hypotenuse DM beträgt 13cm. Um die Höhe DH mit dem Satz des Pythagoras zu berechnen, brauchen wir noch die Länge der Kathete HM.

HM ist die Hälfte von HF. HF ist gleich lang wie EG. Das Dreieck EFG ist rechtwinklig. Die Länge der Katheten EF und FG ist bekannt. Damit können wir EG berechnen:

$$EG=\sqrt{EF^2+FG^2}=\sqrt{(6\,cm)^2+(8\,cm)^2}=10\,cm$$

Das bedeutet: HM = 0,5 * HF = 0,5 * EG = 0,5 * 10cm = 5cm

Wir berechnen die Höhe DH mit dem Satz des Pythagoras:

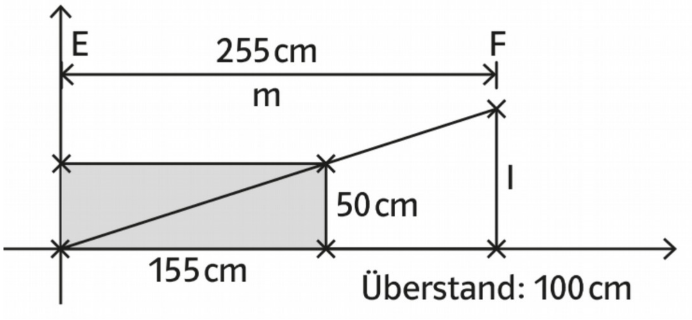
$$DM^2=DH^2+HM^2 \quad \rightarrow \quad DH^2=DM^2-HM^2$$

$$DH=\sqrt{DM^2-HM^2}=\sqrt{((13\,cm)^2-(5\,cm)^2)}=12\,cm$$

Daher beträgt das Volumen des Quaders: V = 6cm * 8cm * 12cm = 576cm³

S. 163 Nr. 10 – gemeinsame Lösung

Versucht man, die Stange parallel zur Seitenfläche hineinzulegen, ergibt sich folgende Situation:



Anhand der Skizze kann man die mögliche Länge der Stange berechnen.

I muss mit dem Strahlensatz berechnet werden:

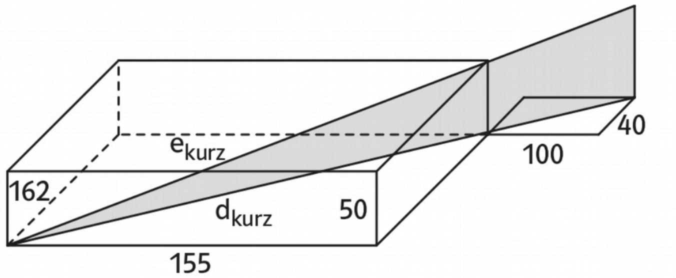
$$\frac{50\text{cm}}{155\text{cm}}=\frac{I}{255\text{cm}} \quad \text{d.h.:} \quad I=255\text{cm}\cdot\frac{50\text{cm}}{155\text{cm}}\approx 82{,}26\,cm$$

Die Länge der Stange ergibt sich dann mit dem Satz des Pythagoras:

$$l=\sqrt{((82{,}26\,cm)^2+(255\,cm)^2)}\approx 267{,}9\,cm$$

Wir sehen also: so kann die Stange nicht 3m lang sein!

Legt man die Stange stattdessen diagonal in den Laderaum, so ergibt sich folgende Situation:



Wir können mit der Skizze die Strecke d_{kurz} berechnen:

$$d_{kurz}=\sqrt{((155\,cm)^2+(50\,cm)^2)}\approx 162{,}86\,cm$$

Wir können auch die entsprechende Strecke d_{lang} berechnen (mit Überstand):

$$d_{lang}=\sqrt{((255\,cm)^2+(202\,cm)^2)}\approx 325{,}31\,cm$$

Die kurze Höhe I_{kurz} ist bereits gegeben: 50cm

Die lange Höhe I_{lang} können wir berechnen:

$$\frac{50\text{cm}}{162{,}86}=\frac{I_{lang}}{325{,}31\text{cm}} \quad \rightarrow \quad I_{lang}=325{,}31\text{cm}\cdot\frac{50\text{cm}}{162{,}86\text{cm}}\approx 99{,}87\,cm$$

Die Länge des Stabs e_{lang} können wir jetzt berechnen:

$$e_{lang}=\sqrt{(d_{lang}{}^2+I_{lang}{}^2)}=\sqrt{((325{,}31\,cm)^2+(99{,}87\,cm)^2)}\approx 340{,}29\,cm$$

Wir könnten auf diese Art und Weise also einen Stab der Länge 3,40m (ca.) transportieren.

(Hinweis: Je nachdem, wie man rechnet, ergeben sich durch Rundung Unterschiede um bis zu 7cm, aber egal wie: Die Stange mit 3m passt rein!).