S. 147 Nr. 8

Vierfeldertafel mit konkreten Zahlen:

I : Person ist infiziert

P : Test ist positiv

Angaben : Gesamtbevölkerung: 100 000

$0{,}1\,\% \cdot 100\,000 = 100$ Personen infiziert

	P	$\overline{P}$	ges.
I	$99\,\% \cdot 100$ $= 99$ 3	$100 - 99$ $= 1$ 4	100 1
$\overline{I}$	$99\,900 - 97\,902$ $= 1998$ 4	$98\,\% \cdot 99\,900$ $= 97\,902$ 3	$100\,000 - 100$ $= 99\,900$ 2
ges.	$99 + 1998$ $= 2097$ 5	$1 + 97\,902$ $= 97\,903$ 5	100 000 1

Hier anfangen!

Reihenfolge siehe Zahlen links unten im Kästchen ...

(Kontrolle: $2097 + 97\,903 = 100\,000$ – passt!)

(Hinweis: Die Vierfeldertafel ist nur für euch zum Nachvollziehen so ausführlich beschriftet. In eurer Tafel genügen die groß geschriebenen Zahlen!)

Aus der Vierfeldertafel ablesen:

Anzahl aller positiv getesteten Personen: 2097

Anzahl von Personen mit Infektion und positiv: 99

A: Wahrscheinlichkeit für 1 Person, die positiv getestet wurde, infiziert zu sein, beträgt:

$$P_P(I) = \frac{99}{2097} = \frac{11}{233} \approx 0{,}047 = 4{,}7\,\%$$

Vierfeldertafel mit Prozentwerten

P: positiver Test I: infizierte Person

	P	$\overline{P}$	ges.
I	$99\,\% \cdot 0{,}1\,\%$ $= 0{,}099\,\%$	$0{,}001\,\%$	$0{,}1\,\%$
$\overline{I}$	$1{,}998\,\%$	$98\,\% \cdot 99{,}9\,\%$ $= 97{,}902\,\%$	$99{,}9\,\%$
ges.	$2{,}097\,\%$	$97{,}903\,\%$	$100\,\%$

d.h.:

$P(P \cap I) = 0{,}099\,\%$

$P(P) = 2{,}097\,\%$

$$P_P(I) = \frac{P(P \cap I)}{P(P)} = \frac{0{,}099\,\%}{2{,}097\,\%} \approx 4{,}7\,\%$$

Lösung mit der Formel

Ereignisse: P: Test positiv $\quad I$: Person infiziert

Gesucht: $P_P(I) = \frac{P(P \cap I)}{P(P)} \Rightarrow$ ges.: $P(P \cap I)$ und $P(P)$

Gegeben: a) „0,1% sind infiziert"

$\Rightarrow P(I) = 0{,}1\%$

$\Rightarrow P(\overline{I}) = 100\% - P(I) = 99{,}9\%$

b) „bei infizierter Person mit 99% Test positiv"

$\Rightarrow P_I(P) = 99\%$

$\Rightarrow$ mit $P_I(P) = \frac{P(P \cap I)}{P(I)}$ folgt: $P(P \cap I) = P_I(P) \cdot P(I)$

$\Rightarrow$ daher: $P(P \cap I) = 99\% \cdot 0{,}1\% = 0{,}099\%$

c) „bei nicht-inf. Person mit 98% Test negativ"

$\Rightarrow P_{\overline{I}}(\overline{P}) = 98\%$

$\Rightarrow$ mit $P_{\overline{I}}(\overline{P}) = \frac{P(\overline{P} \cap \overline{I})}{P(\overline{I})}$ folgt: $P(\overline{P} \cap \overline{I}) = P_{\overline{I}}(\overline{P}) \cdot P(\overline{I})$

$\Rightarrow P(\overline{P} \cap \overline{I}) = 98\% \cdot 99{,}9\% = 97{,}902\%$

Wir haben $P(P \cap I)$ schon gefunden, es fehlt also noch $P(P)$.

Es gilt: $P(P) = P(P \cap I) + P(P \cap \overline{I})$.

Es gilt: $P(P \cap \overline{I}) = P(\overline{I}) - P(\overline{P} \cap \overline{I})$

$= 99{,}9\% - 97{,}902\% = 1{,}998\%$

Einsetzen: $P(P) = 0{,}099\% + 1{,}998\% = 2{,}097\%$.

Lösung: $P_P(I) = \frac{P(P \cap I)}{P(P)} = \frac{0{,}099\%}{2{,}097\%} \approx 4{,}7\%$

Das mit dem „geringen Aufwand" nehme ich zurück ^^

Lösung mit zwei Baumdiagrammen (P: Positiv, I: Infiziert)

Diagramm 1

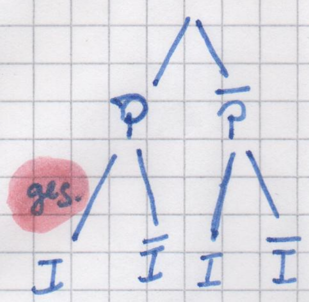
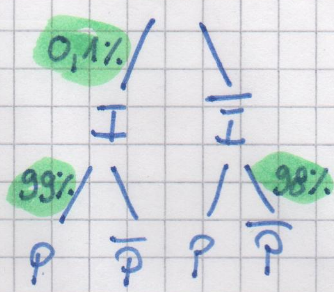


Diagramm 2



gg.

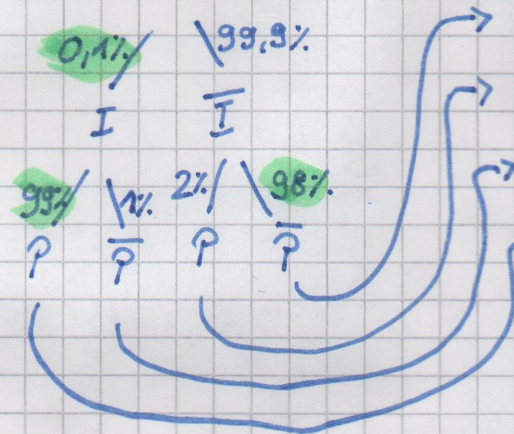
Hinweis:

Hier schrittweise Lösung zum Nachvollziehen,

normal kann man alle Werte gleich ins Diagramm eintragen!

1. Schritt: In Diagramm 2 fehlende Werte eintragen.

Diagramm 2:



W'keiten der Ausgänge:

$P(\overline{I} \cap \overline{P}) = 99{,}9\% \cdot 98\% = 97{,}902\%$

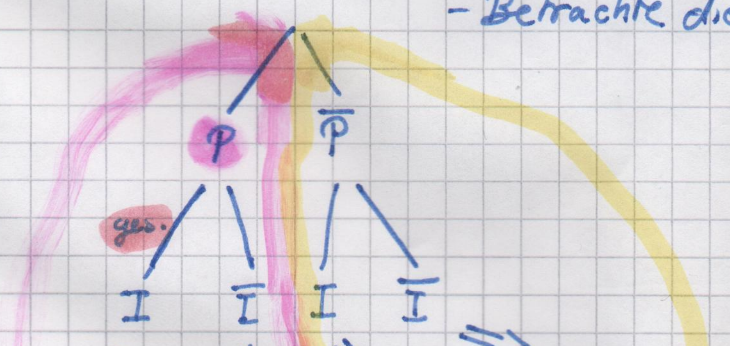
$P(\overline{I} \cap P) = 99{,}9\% \cdot 2\% = 1{,}998\%$

$P(I \cap \overline{P}) = 0{,}1\% \cdot 1\% = 0{,}001\%$

$P(I \cap P) = 0{,}1\% \cdot 99\% = 0{,}099\%$

2. Schritt: Mit den Ergebnissen der Ausgänge Diagr. 1 berechnen:

– Betrachte die Diagrammhälften einzeln –



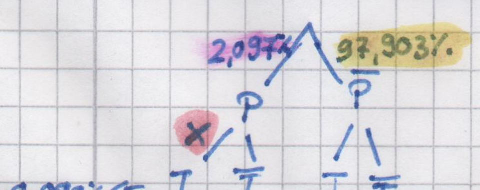
$P(P) = 0{,}099\% + 1{,}998\%$

$= 2{,}097\%$

$P(\overline{P}) = 0{,}001\% + 97{,}902\%$

$= 97{,}903\%$

3. Schritt: Fehlenden Wert aus Diagramm 1 berechnen:



Aus Diagramm folgt:

$P(P \cap I) = 2{,}097\% \cdot x = 0{,}099\%$

d.h. $x = 0{,}099\% : 2{,}097\% \approx 4{,}7\%$